

Pauta Control 4

P1.

a) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\forall x, y \in (0, \infty)$ $f(xy) = f(x) + f(y)$ y $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

a1) Probar que $f(1) = 0$ y que $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \forall x, y \in (0, \infty)$.

En efecto, para $x = 1$, $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ queda $f(1) = -f(1) \Rightarrow f(1) = 0$. (0.5 puntos)

Para $f(\frac{x}{y})$ escribimos $f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) \underbrace{=}_{\text{Propiedad}} f(x) + f(\frac{1}{y}) \underbrace{=}_{\text{Propiedad}} f(x) - f(y)$ (0.5 puntos)

a2) Probar por inducción que $\sum_{k=1}^n f(k) = f(n!) \forall n \geq 1$

i) Para $n = 1$ $\sum_{k=1}^1 f(k) = f(1!) \Leftrightarrow f(1) = f(1!) \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow V$ (0.3 puntos)

ii) Sea $\sum_{k=1}^n f(k) = f(n!)$ algún $n \in \mathbb{N}$. (0.2 puntos)

iii) Por dem. que: $\sum_{k=1}^{n+1} f(k) = f((n+1)!)$.

En efecto

$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^n f(k) + f(n+1) = f(n!) + f(n+1) \underbrace{=}_{\text{Propiedad}} f[n!(n+1)] = f((n+1)!)$ (0.5 puntos)

a3) $\sum_{k=1}^n kf(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^n kf(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^n kf[(k+1) \cdot \frac{1}{k}] = \sum_{k=1}^n k[f(k+1) - f(k)]$. (0.2 puntos)

Arreglando

$= \sum_{k=1}^n \{(k+1)(f(k+1) - kf(k)) - f(k+1)\} = \sum_{k=1}^n \underbrace{[(k+1)f(k+1) - kf(k)]}_{\text{telescópica}} - \sum_{k=1}^n f(k+1)$
 $= (n+1)f(n+1) - 1f(1) - \sum_{k=1}^n f(k+1)$. (0.5 puntos)

Pero $\sum_{k=1}^n f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - f(1) = f((n+1)!)$ según (a2).

Así $\sum_{k=1}^n kf(1 + \frac{1}{k}) = (n+1)f(n+1) - f[(n+1)!]$ (0.3 puntos)

b) Calcular

$\sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^j \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{j}{i} \frac{2^{2i}}{3^j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} \frac{2^{2i}}{3^j} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{3^j} \sum_{i=1}^j 2^{2i} \cdot 2^i \cdot \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{3^j} \underbrace{\sum_{i=1}^j \binom{j}{i} 8^i}_{\text{binomio}} =$ (1.5 puntos)

$$\sum_{j=1}^n \frac{9^j - 1}{3^j} = \sum_{j=1}^n [3^j - (\frac{1}{3})^j] \text{ sumas geométricas.} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$= \sum_{j=1}^n 3^j - \sum_{j=1}^n (\frac{1}{3})^j = 3 \frac{1-3^n}{1-3} - \frac{1}{3} \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-1/3} = \frac{3}{2}[3^n - 1] - \frac{1}{2}[\frac{3^n-1}{3^n}] = \frac{3^n-1}{2}[3 - \frac{1}{3^n}] \quad (1.0 \text{ punto})$$

P2.

a) $(A, *)$ es estructura algebraica y $*$ asociativa en A ; $a \in A$, fijo

$$B = \{x \in A / a * x = x * a\}$$

a1) Demostrar que $\forall x, y \in B, (x * y) \in B$

Debemos probar que $(x * y) * a = a * (x * y)$ sabiendo que $a * x = x * a \wedge a * y = y * a$ pues $x, y \in B$.

(0.5 puntos)

Entonces $(x * y) * a = x * (y * a)$ Asociatividad

$$= x * (a * y) \text{ pues } y \in B$$

$$= (x * a) * y \text{ asociatividad}$$

$$= (a * x) * y \text{ pues } x \in B$$

$$= a * (x * y) \text{ asociatividad}$$

(1.5 puntos)

a2) $e \in A$, e neutro, entonces $e \in B$.

En efecto, como $e \in A$ es neutro, $e * a = a * e = a$.

Sigue que $e \in B$

(1.0 punto)

a3) Si $x \in B$ tiene inverso $x^{-1} \in A$, entonces $x^{-1} \in B$.

Debemos probar que $x^{-1} * a = a * x^{-1}$ sabiendo que $x * a = a * x$.

En efecto $x * a = a * x \quad / x^{-1} *$ operando

$$(x^{-1} * x) * a = x^{-1} * (a * x) \text{ Asociat. y Neutro}$$

$$a = e * a = (x^{-1} * a) * x \quad / * x^{-1} \text{ operando}$$

(1.0 punto)

$$a * x^{-1} = (x^{-1} * a) * (x * x^{-1}) \text{ neutro}$$

$$a * x^{-1} = (x^{-1} * a) * e = (x^{-1} * a).$$

Sigue que $x^{-1} \in B$.

(1.0 punto)

b) El conjunto $C = \{(m, n) \in Q \times \mathbb{Z} / (m + n) \in \mathbb{N}\}$ es infinito.

Basta fijar, por ejemplo, $m = 0 \in Q$ y $C_0 = \{(0, n) / n \in \mathbb{Z}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$.

(0.5 puntos)

Entonces C es infinito y $C \subseteq Q \times \mathbb{Z}$, donde $Q \times \mathbb{Z}$ es numerable.

Se concluye que C es numerable al ser subconjunto infinito de un numerable.

(0.5 puntos)