



### Control 7

**P1.** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  complejos unitarios tales que:

$$z_1 + z_2 = -u, \quad u \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = v, \quad v \in \mathbb{C}.$$

- (a) (1.5 pts.) Pruebe que  $|u| \leq 2$  y que  $|v| = 1$ .
- (b) (1.5 pts.) Pruebe que  $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$ .
- (c) (1.5 pts.) Pruebe que  $u = \overline{u}v$ .
- (d) (1.5 pts.) Si los ángulos de la escritura polar de  $u$  y  $v$ , son  $\varphi$  y  $\theta$  respectivamente, es decir

$$u = |u|e^{i\varphi} \text{ y } v = |v|e^{i\theta},$$

utilice (c) para probar que

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**P2.** (a) (3 pts.) Demuestre que las raíces de la ecuación de segundo grado  $z^2 + z + 1 = 0$ , son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1.

- (b) (3 pts.) Sean  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , un complejo dado,  $n \geq 2$  y  $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$  las raíces  $n$ -ésimas de  $z$ . Calcule

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}.$$

16 de junio de 2007