Resumen Polinomios

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

$\mathbb{K}$ denotará al cuerpo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Def: Un *polinomio* es una función $p:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ dado por: $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
$a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes llamadas *coeficientes* del polinomio p.
Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se le denota $\mathbb{K}[x]$.

Prop: Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$. $p = q \Leftrightarrow a_k = b_k \ \forall k = 1, ..., n$.

Def: Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ un polinomio. El grado de p (se denota $gr(p)$) es el k más grande posible tal que a_k es no nulo, ie, en p, si $a_n \neq 0$, entonces $gr(p) = n$.
Si $p(x) = 0$, se tiene que $gr(p) = -\infty$.

Convención: $n + (-\infty) = -\infty, \quad n > -\infty,$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Def: $p \in \mathbb{K}[x]$. p es mónico si a_n=1, donde $n = gr(p)$.

Def: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ en $\mathbb{K}[x]$.

a) $(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
b) $(p\cdot q)(x) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k$

Prop:
a) $gr(p+q) \leq \max\{gr(p), gr(q)\}$
b) $gr(p\cdot q) = gr(p) + gr(q)$

Prop: $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad sin divisores de cero.

Prop: En $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ los únicos polinomios que poseen inverso son las constantes no nulas.

Teo: *(Teo. de la división)* Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existen únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que:

a) $p = q \cdot d + r$
b) $gr(r) < gr(d)$

Def:
a) En el Teo. de la división, el punto a) se llama división con resto de p por d.
b) q se llama cuociente.
c) r se llama resto
d) $d|p \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{K}[x]) \ p = q \cdot d$.

Teo: *(del resto)* $p \in \mathbb{K}[x], c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por $(x-c)$ es exactamente $p(c)$.

Def: Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es una raíz del polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.

Prop: $c \in \mathbb{K}$ es raíz de $p \Leftrightarrow (x-c)|p(x)$

Prop:
a) Si $c_1, c_2, ..., c_k$ son raíces distintas de p, entonces $(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_k)|p(x)$
b) Sea $n \geq 1$. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $gr(p) = n$, entonces p posee a lo más n raíces distintas.
c) Sean $n \geq 1$, y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $gr(p) \leq n$ y $gr(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces son iguales (como polinomios).

Teo. fundamental del Álgebra: Sea p un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$, tal que $gr(p) = n \geq 1$. Entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Prop: Sea p un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que $gr(p) = n \geq 1$. Entonces existen valores $\alpha, c_1, ..., c_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, ..., l_m \geq 1$ tales que $p(x) = \alpha(x-c_1)^{l_1}...(x-c_m)^{l_m}$.

Cor: $gr(p) = l_1 + ... + l_m, \quad \alpha = a_n$

Prop: Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ y sea $z \in \mathbb{C}$ raíz de p. Entonces $\bar{z}$ también es raíz de p.

Cor: Si $p \in \mathbb{R}[x]$, se tiene que $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$

Prop: Sea p un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que $gr(p) = n \geq 1$. Entonces $\exists \alpha, c_1, ..., c_m, a_1, b_1, ..., a_s, b_s \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \alpha(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_m)(x^2+a_1x+b_1)...(x^2+a_sx+b_s)$, donde $c_1, ..., c_m$ son las raíces reales de p y $x^2+a_1x+b_1, ..., x^2+a_sx+b_s$ son polinomios sin raíces reales (con posible repetición). α es el coeficiente a_n de p.

Prop: Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ con coeficientes $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Si $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (r, s son primos relativos) es una raíz de p, entonces: $r|a_0 \wedge s|a_n$.

Cor: Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ mónico, con coeficientes $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Entonces toda raíz racional de p es entera y divide a a_0.

La **Regla de Ruffini** es un algoritmo eficiente para dividir un polinomio p por $(x-c)$. Se obtienen $q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ y $r(x) = a_0 + b_0 c$ tales que $p(x) = q(x)(x-c) + r(x)$. El **Algoritmo de Horner** consiste en aplicar la regla de Ruffini para evaluar polinomios mediante el teorema del resto.

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
c		$b_{n-1}c$	$\cdots$	$b_1 c$	$b_0 c$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}c$	$\cdots$	$b_0 = a_1 + b_1 c$	$r = a_0 + b_0 c$