UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

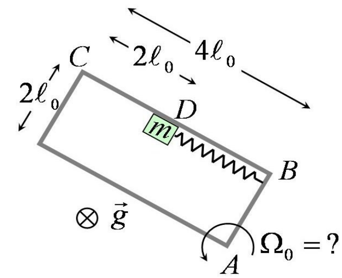
FI21A-2 MECANICA 2007-1

Prof. Patricia Sotomayor C.

EXAMEN

28 de junio de 2007
Tiempo: 3:00 horas

PROBLEMA 1:



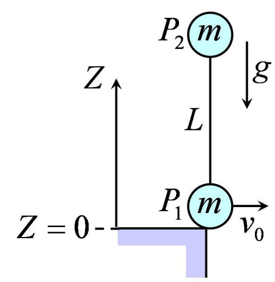
Considere una caja de base rectangular (lados $2\ell_0$ y $4\ell_0$) que rota con velocidad angular constante, desconocida, respecto de un eje vertical que pasa por su vértice A como muestra la figura. Por el interior de la caja, una partícula de masa m está ligada al vértice B, mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural ℓ_0.

Despreciando todos los roces, determine:

a) La velocidad angular de la caja ($\Omega_0 = ?$) tal que la partícula tenga un punto de equilibrio estable en el punto D (punto medio de los vértices B y C). En este caso determine el período de pequeñas oscilaciones en torno a D.

b) Considerando el valor de Ω_0 determinado en (a), a qué distancia de B la partícula se separa de la pared BC, si es liberada desde el reposo (relativo a la caja) en el vértice C.

PROBLEMA 2:



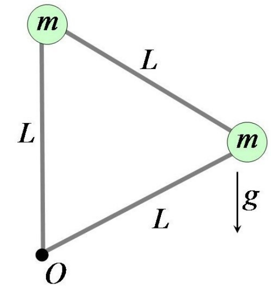
Considere las partículas P_1 y P_2 de masa m cada una, unidas por una barra de largo L. El sistema se encuentra en equilibrio en posición vertical, en el borde de una superficie horizontal ubicada en $Z = 0$, como se indica en la figura. Si, en $t = 0$, P_1 se impulsa en forma horizontal con rapidez v_0, determine:

a) El ángulo θ que la barra forma con la vertical y la componente vertical de la velocidad del centro de masa ($\dot{Z}_G$) en función del tiempo.

b) La componente vertical de la velocidad de P_1 en función del ángulo θ ($\dot{Z}_1(\theta)$). ¿Para qué condición de v_0 P_1 puede en algún momento ascender (es decir, tener $\dot{Z}_1 > 0$)?

c) La magnitud de la fuerza que la barra ejerce sobre las partículas mientras el sistema cae.

PROBLEMA 3:



La estructura de la figura puede rotar libremente en torno a un eje horizontal fijo, ubicado en el punto O. El sistema consta de tres barras de largo L y masa despreciable, con dos partículas de masa m pegadas en los vértices libres. El sistema soltado desde el reposo en la posición que indica la figura. Despreciando todo tipo de roces, determine, en función del ángulo girado:

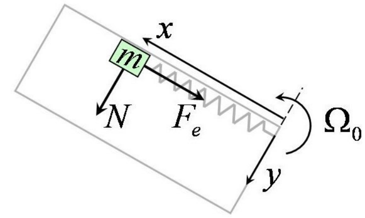
a) La velocidad angular de la estructura

b) La reacción que ejerce el eje a la estructura

c) El periodo de pequeñas oscilaciones para la posición de equilibrio estable

Solución Problema 1

En el sistema no inercial, las ecuaciones escalares del movimiento son:



$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) + m\Omega_0^2 x \qquad (1)$$

$$0 = N - 2m\Omega_0\dot{x} - m\Omega_0^2\, 2\ell_0 \qquad (2)$$

a) Condiciones de equilibrio:

El valor de Ω_0, para obtener el equilibrio en $x = D$, se encuentra imponiendo en (1) que $\ddot{x}(x = D) = 0$

=> $0 = -k(2\ell_0 - \ell_0) + m\Omega_0^2 \cdot 2\ell_0$ => $2m\Omega_0^2 = k(2-1)$ => $\boxed{\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}}$

El periodo de pequeñas oscilaciones:

de (1): $m\ddot{x} + (k - m\Omega_0^2)x = k\ell_0$

donde Ω_0 fue calculado en (a) => $m\ddot{x} + (2m\Omega_0^2 - m\Omega_0^2)x = 2m\Omega_0^2\ell_0$ => $\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 2\Omega_0^2\ell_0$ (3)

=> $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}}$

b) Distancia a la que se separa de la pared

Si x_S es la distancia a la que se separa, entonces $N(x = x_S) = 0$

En (2) => $2m\Omega_0\dot{x}(x_S) + m\Omega_0^2\, 2\ell_0 = 0$

=> $\dot{x}(x_S) = -\Omega_0\ell_0$ (4) (aparece condición sobre la rapidez)

Para obtener la relación entre $\dot{x}$ y x usamos la ecuación (3)

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 2\Omega_0^2\ell_0 \;\Rightarrow\; \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} + \Omega_0^2 x = 2\Omega_0^2\ell_0 \;\Rightarrow\; \int_0^{\dot{x}} \dot{x}\,d\dot{x} = \Omega_0^2 \int_{4\ell_0}^{x} (2\ell_0 - x)\,dx$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{\Omega_0^2}{2}\left((4\ell_0 x - 16\ell_0^2) - (x^2 - 16\ell_0^2)\right) \;\Rightarrow\; \dot{x}^2 = \Omega_0^2\, x(4\ell_0 - x) \;\Rightarrow\; \dot{x}^2(x_S) = \Omega_0^2\, x_S(4\ell_0 - x_S)$$

Expresión que debe satisfacer la condición (4) => $\Omega_0^2 x_S(4\ell_0 - x_S) = \Omega_0^2\ell_0^2$

de donde $x_S^2 - 4\ell_0 x_S + \ell_0^2 = 0$ => $x_S = \dfrac{4\ell_0 \pm \sqrt{16\ell_0^2 - 4\ell_0^2}}{2} = \ell_0(2 \pm \sqrt{3})$

La partícula parte con el resorte estirado (desde $x = 4\ell_0$), por lo tanto toma primero el valor con el signo +. Es decir, la posición en la que se separa de la pared es: $\boxed{x_S = \ell_0(2 + \sqrt{3})}$

<u>Solución Problema 2</u>

Para el sistema: $\vec{\tau}_G = I_G\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}\sum m_i\ (Gi)^2 = 2m(\tfrac{L}{2})^2\,\dot{\vec{\omega}} = \dfrac{mL^2}{2}\dot{\vec{\omega}}$ (1)

$\vec{F}^{ext} = M\vec{a}_G = 2m\vec{a}_G = 2mg\ \hat{j}$ (2)

a) Angulo de la barra y componente vertical de $\vec{v}_G$

El centro de masas del sistema (G) está en el punto medio de la barra.

Durante todo el movimiento: $\vec{\tau}_G = \vec{0}$, en (1) => $\vec{\omega} = \overrightarrow{cte}$

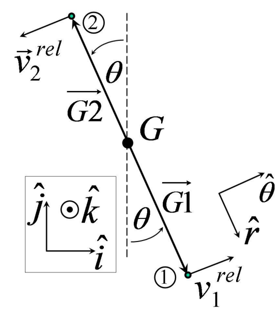
Inicialmente: $\vec{L}_G = -\dfrac{L}{2}\hat{j}\times mv_o\hat{i} = \dfrac{Lmv_o}{2}\hat{k} = I_G\,\vec{\omega}(0)$ => $\dfrac{Lmv_o}{2} = \dfrac{mL^2}{2}\omega$ => $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{L}$

Sabemos que $\theta(0) = 0$ => $\boxed{\theta(t) = \dfrac{v_0}{L}t}$ (3)

La componente vertical de la ecuación (2) es: $2m\ddot{Z}_G = -2mg$ => $\dot{Z}_G(t) = \dot{Z}_G(0) - gt$

Sabemos que $\dot{Z}_G(0) = 0$ => $\boxed{\dot{Z}_G(t) = -gt}$

b) Componente vertical de $\vec{v}_1$ (absoluta) y condición para que P_1 ascienda



La velocidad de P_1 es: $\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{v}_1^{rel} = \vec{v}_G + \dfrac{L}{2}\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \dfrac{L}{2}\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j})$ (4)

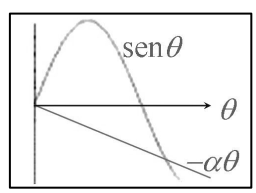
Si $\dot{Z}_1$ es la componente vertical de $\vec{v}_1$ => $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_G + \dfrac{L}{2}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$

Reemplazamos los valores calculados, con $t(\theta)$ despejado de (3):

$$\dot{Z}_1(\theta) = -\frac{gL}{v_0}\theta + \frac{v_0}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{v_0}{2}\left[-\frac{2gL}{v_0^2}\theta + \operatorname{sen}\theta\right]$$

Condición para que $\dot{Z}_1(\theta)$ admita algún valor positivo:

La función en análisis se puede escribir como $\dot{Z}_1(\theta) = K(\operatorname{sen}\theta - \alpha\theta)$. Para que esta función tome algún valor positivo se requiere que el valor absoluto de la pendiente de la recta en la figura sea menor que un máximo ($\alpha < \alpha_{máx}$). La condición límite se obtiene imponiendo que la pendiente de la función $\operatorname{sen}\theta$ sea mayor que α en $\theta = 0$.



=> la condición es: $\cos(\theta = 0) > \alpha$ => $\alpha < 1$

Es decir: $\dfrac{2gL}{v_0^2} < 1$ => $v_0^2 > 2gL$

c) Magnitud de la Reacción

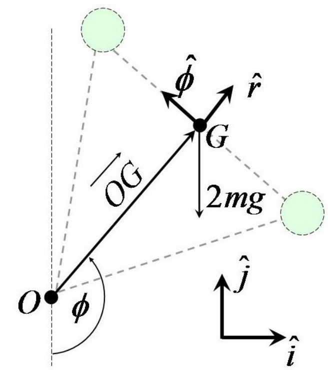
Si aislamos P_1, las fuerzas externas son la reacción $\vec{T}$ y su peso => $m\vec{a}_1 = \vec{T} - mg\ \hat{j}$ (5)

de (4) $\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \dfrac{L}{2}\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ => $\vec{a}_1 = \vec{a}_G + \dfrac{L}{2}(-\dot{\theta}^2\hat{r} + \ddot{\theta}\,\hat{\theta})$, donde $\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{L} = cte$ $\vec{a}_1 = \vec{a}_G + \dfrac{v_0^2}{2L}\hat{r}$

de (2) $\vec{a}_G = -g\ \hat{j}$ => $\vec{a}_1 = -g\ \hat{j} + \dfrac{v_0^2}{2L}\hat{r}$

Reemplazamos esta expresión de $\vec{a}_1$ en (5): $-mg\ \hat{j} + m\dfrac{v_0^2}{2L}\hat{r} = \vec{T} - mg\ \hat{j}$ => $\boxed{\vec{T} = m\dfrac{v_0^2}{2L}\hat{r}}$

Solución Problema 3



O es fijo => podemos tomar las siguientes ecuaciones para el sistema:

$$\vec{\tau}_O = I_O \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}} \sum m_i \,(Oi)^2 = 2mL^2\, \dot{\vec{\omega}} \qquad (1)$$

$$\vec{F}^{ext} = M\vec{a}_G = 2m\vec{a}_G = 2mg\ \hat{j} \qquad (2)$$

El centro de masa está en el punto medio entre las dos partículas, cuya distancia al punto O es $OG = L\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Velocidad angular de la estructura

$$\vec{\tau}_O = \overrightarrow{OG} \times 2mg\,(-\hat{j}) = L\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{r} \times 2mg\,(-\hat{j}) = L\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{r} \times 2mg\,(\cos\phi\,\hat{r} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi})$$

$$\vec{\tau}_O = -\sqrt{3}L\,mg\ \operatorname{sen}\phi\,\hat{k}$$

En (1) => $\ddot{\phi} = \dfrac{\tau_O}{2mL^2} = -\dfrac{\sqrt{3}g}{2L}\operatorname{sen}\phi \qquad (3)$

donde: $\dot{\phi}(0) = 0$ y $\phi(0) = \frac{5\pi}{6}$ => $\dfrac{\dot{\phi}^2}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}g}{2L}\displaystyle\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\phi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi$ => $\boxed{\dot{\phi}^2(\phi) = \dfrac{\sqrt{3}g}{L}(\cos\phi + \tfrac{\sqrt{3}}{2})}$

b) Reacción del eje sobre la estructura

Evaluamos los términos de la ecuación (2), en coordenadas polares:

$$\vec{F}^{ext} = N_r\,\hat{r} + N_\phi\,\hat{\phi} + 2mg\,(\cos\phi\,\hat{r} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}) \quad ; \quad \vec{a}_G = -L\tfrac{\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}^2\,\hat{r} + L\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ddot{\phi}\,\hat{\phi}$$

Por lo tanto: $N_r + 2mg\cos\phi = -2mL\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}^2$

$N_\phi - 2mg\operatorname{sen}\phi = 2mL\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{\phi}$

Despejamos las componentes de la reacción reemplazando $\dot{\phi}^2(\phi)$ y $\ddot{\phi}(\phi)$ calculados en (a):

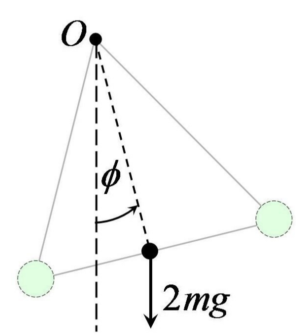
$$N_r(\phi) = -2mg\cos\phi - 2mL\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{L}g(\cos\phi + \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = -2mg\cos\phi - 3mg(\cos\phi + \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = mg\,(-5\cos\phi - \tfrac{3\sqrt{3}}{2})$$

$$N_\phi(\phi) = 2mg\operatorname{sen}\phi + mL\sqrt{3}\cdot(-\tfrac{\sqrt{3}}{2L}g\operatorname{sen}\phi) = 2mg\operatorname{sen}\phi - mg\tfrac{3}{2}\operatorname{sen}\phi = \tfrac{1}{2}mg\operatorname{sen}\phi$$

$$\boxed{\vec{N}(\phi) = \frac{mg}{2}\left[-(10\cos\phi + 3\sqrt{3})\,\hat{r} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}\right]}$$

c) Periodo de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable

El sistema está en su posición de mínima energía potencial en $\phi = 0$ (posición de equilibrio estable).



de (3) $\ddot{\phi} + \dfrac{\sqrt{3}g}{2L}\operatorname{sen}\phi = 0$

Para pequeñas oscilaciones en torno a $\phi_e = 0$ $\operatorname{sen}\phi \approx \phi$

Entonces, la aproximación de pequeñas oscilaciones responde a la ecuación:

$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$, con $\omega^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{g}{L}$

de donde $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{\sqrt{3}g}}}$