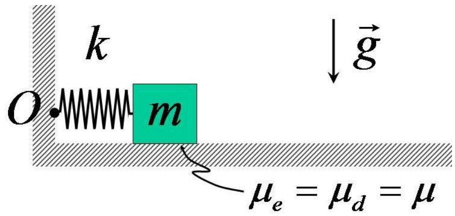
EXAMEN

7 de julio de 2006
Tiempo: 3 horas

Problema 1:



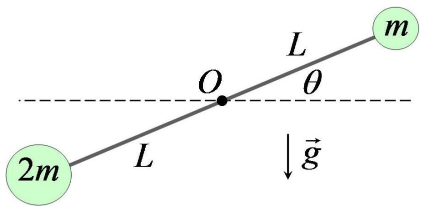
Un bloque de masa m se encuentra unido al extremo de un resorte de constante k, cuyo otro extremo está fijo a un punto O. El bloque puede deslizar con roce sobre una superficie horizontal, cuyos coeficientes de roce estático y dinámico son $\mu_e = \mu_d = \mu$.

Si se suelta el bloque desde el reposo, estando comprimido en una distancia d, donde d es 5 veces la deformación mínima del resorte capaz de vencer el roce estático, determine:

a) El estiramiento máximo que experimenta el resorte.

b) El número de oscilaciones que da el bloque antes de detenerse definitivamente.

Problema 2:



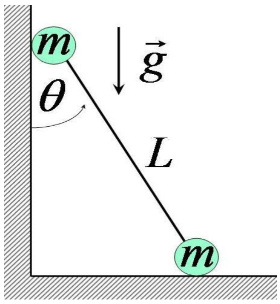
El sistema de la figura está compuesto de una barra de largo $2L$ y masa despreciable, que tiene unidas en sus extremos dos partículas, de masas m y $2m$. La barra puede girar en torno a un eje ubicado en su punto medio O, sin roce, en un plano vertical.

Si el sistema se suelta desde el reposo, estando la barra en posición horizontal, determine:

a) La aceleración y la velocidad angular en función de θ

b) La reacción que el eje ejerce a la barra en función de θ y la fuerza mínima que debe ser capaz de soportar el eje para que no se rompa durante todo el movimiento.

Problema 3:



Una barra sin masa de largo L tiene en sus dos extremos partículas puntuales de masa m cada una. La partícula superior se apoya sin roce sobre una pared vertical, mientras que la partícula inferior se mueve sobre una superficie horizontal.

a) Si entre la partícula inferior y la superficie existe un roce estático con coeficiente $\mu = 0.5$, determine el máximo ángulo θ^* que la barra puede tener con la vertical, tal que el sistema se mantenga en reposo.

b) Si entre la partícula inferior y la superficie <u>no existe ningún tipo de roce</u>, determine una ecuación diferencial para $\ddot{\theta}$ en función del ángulo θ.

c) Para la condición <u>sin roce</u>, determine el ángulo θ_D en que la partícula superior se despega de la pared vertical, si el movimiento comenzó desde el reposo en la posición $\theta = \theta^*$.

P1| Deformación mínima para vencer el roce estático $= \delta_m \Rightarrow k\delta_m = \mu mg \Rightarrow \delta_m = \frac{\mu mg}{k}$

$\Rightarrow$ la deformación inicial es $\delta_i = \frac{5\mu mg}{k}$.

Balance de energía:

Tomamos el tramo desde que inicia su movimiento hasta que se detiene por primera vez $\Rightarrow$ En ~~ambos~~ las condiciones iniciales y finales la energía cinética es nula.

$\Delta E = W F^{nc}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k\delta_F^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{5\mu mg}{k}\right)^2 = -\mu mg\left(\delta_F + 5\frac{\mu mg}{k}\right)$$

$$\delta_F^2 - 25\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + 2\frac{\mu mg}{k}\delta_F + 10\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 = 0$$

$$\delta_F^2 + 2\frac{\mu mg}{k}\delta_F - 15\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 = 0 \Rightarrow \delta_F = \frac{\mu mg}{k}\left[\frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2}\right]$$

$$\delta_F = \begin{cases} 3\mu mg/k \\ -5\mu mg/k \leftarrow \delta \text{inicial.} \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{\delta_F = 3\mu mg/k}$ = Estiramiento máximo, ya que en cualquier tramo siguiente el sistema habrá perdido energía.

b) Con esta deformación la fuerza elástica vence el roce estático y el bloque reinicia su movimiento.

Balance de energía

~~En~~ Este nuevo tramo considera desde que reinicia su movimiento hasta que se detiene por segunda vez

$\Rightarrow \delta_i' = \delta_F$

$$\Delta E = WF^{nc} \Rightarrow \frac{1}{2}k\delta_F'^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{3\mu mg}{k}\right)^2 = -\mu mg\left(\delta_F' + \frac{3\mu mg}{k}\right)$$

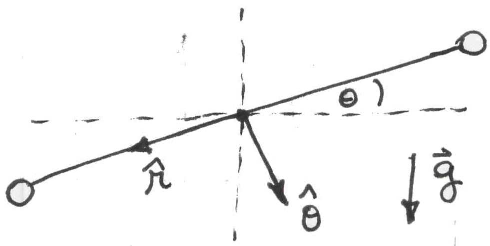
$$\delta_F'^2 - 9\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + 2\frac{\mu mg}{k}\delta_F' + 6\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 = 0$$

$$\delta_F'^2 + 2\frac{\mu mg}{k}\delta_F' - 3\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 = 0 \Rightarrow \delta_F' = \frac{\mu mg}{k}\left[\frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}\right]$$

$$\delta_F' = \begin{cases} \mu mg/k \\ -3\mu mg/k \leftarrow \delta \text{inicial } 2^{\circ} \text{ tramo} \end{cases}$$

$\therefore \delta_F' = \frac{\mu mg}{k}$ Con esta deformación el resorte no vence al roce estático $\Rightarrow$ se detiene definitivamente $\therefore$ da una oscilación

P2



$$\vec{g} = g\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{r} + g\cos\theta\,\hat{\theta}$$

a) $\vec{\tau}_0 = L\hat{r} \times 2m\vec{g} + (-L)\hat{r} \times m\vec{g} = L\hat{r} \times mg(\mathrm{sen}\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta})$

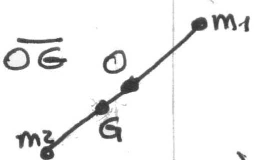
$\vec{\tau}_0 = mgL\cos\theta\,\hat{k}$

$I_0 = 3mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow mgL\cos\theta = 3mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g\cos\theta}{3L}}$

$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{g}{3L}\cos\theta\,d\theta \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g\,\mathrm{sen}\theta}{3L}}$

b) $\vec{F}^{ext} = M\vec{a}_G = 3m\vec{a}_G$

G describe un movimiento circular de radio $\overline{OG}$



$\vec{a}_G = -\|\overrightarrow{OG}\|\dot{\theta}^2\hat{r} + \|\overrightarrow{OG}\|\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$

$\left(\overrightarrow{OG} = \frac{2mL\hat{r} - mL\hat{r}}{3m} = \frac{L}{3}\hat{r}\right)$

Reemplazando $\|\overrightarrow{OG}\|$, $\dot{\theta}^2$ y $\ddot{\theta}$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_G &= -\frac{2g}{9}\mathrm{sen}\theta\,\hat{r} + \frac{g}{9}\cos\theta\,\hat{\theta} \\ \vec{F}^{ext} &= 3m\vec{g} + R_r\hat{r} + R_\theta\hat{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3mg\,\mathrm{sen}\theta + R_r = -3m\cdot\frac{2g}{9}\mathrm{sen}\theta & (1) \\ 3mg\cos\theta + R_\theta = 3m\cdot\frac{g}{9}\cos\theta & (2) \end{cases}$$

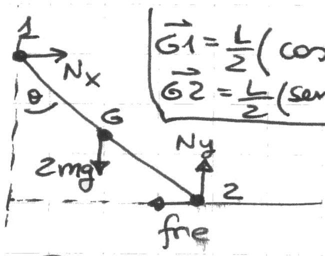
de (1)
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R}_r &= -\left(3 + \frac{2}{3}\right)mg\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{r} \\ \vec{R}_\theta &= \left(3 - \frac{1}{3}\right)mg\cos\theta\,\hat{\theta} \end{aligned}}$$

c) $\|\vec{R}\| = \frac{mg}{3}\sqrt{(11)^2\mathrm{sen}^2\theta + 8^2\cos^2\theta} = \frac{mg}{3}\sqrt{57\,\mathrm{sen}^2\theta + 64}$

$R_{máx} \Rightarrow \frac{d}{d\theta}(\mathrm{sen}^2\theta) = 0 \Rightarrow 2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \begin{cases} 0, \pi & \text{mín} \\ \pm\pi/2 & \text{máx} \end{cases}$

$\Rightarrow R_{máx} = \frac{11}{3}mg$ y ocurre en $\pm\pi/2$

P3 a) En reposo:



$$\vec{G1} = \frac{L}{2}(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{i})$$
$$\vec{G2} = \frac{L}{2}(\sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$$

$$F_x = N_x - fre = 0 \Rightarrow N_x = fre \quad (1.1)$$
$$F_y = N_y - 2mg = 0 \Rightarrow N_y = 2mg \quad (1.2)$$
$$\vec{\tau}_G = 0 = \vec{G1} \times N_x\hat{i} + \vec{G2} \times (N_y\hat{j} + fre(-\hat{i})) \quad (2)$$
$$\vec{\tau}_G = -\frac{L}{2}\cos\theta N_x \hat{k} + \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta N_y \hat{k} - \frac{L}{2}\cos\theta\, fre\, \hat{k} \quad (*)$$

haciendo $\vec{\tau}_G = 0$ y reemplazando (1.1) y (1.2) $\Rightarrow$

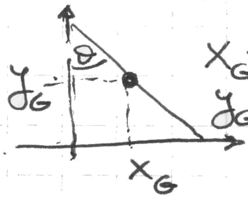
$$\Rightarrow \frac{L}{2}\left[-fre\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot 2mg - \cos\theta\, fre\right] = 0 \Rightarrow 2fre\cos\theta = 2mg\operatorname{sen}\theta \Rightarrow tg\theta = \frac{fre}{mg}$$

El máximo θ ocurre para $fre\,máx = \mu N_y = mg$

$$\Rightarrow tg\theta^* = \frac{mg}{mg} \Rightarrow \boxed{\theta^* = \pi/4}$$

---

b) $$\Sigma\vec{\tau}_G = I_G\ddot{\theta} = 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2\ddot{\theta} = \frac{mL^2}{2}\ddot{\theta}$$



$$x_G = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta$$
$$y_G = \frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\vec{F}_{ext} = 2m\,\vec{a}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = 2m\,\ddot{x}_G & (3.1) \\ N_y - 2mg = 2m\,\ddot{y}_G & (3.2) \end{cases}$$

$$\dot{x}_G = L/2\cos\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x}_G = L/2\left[\cos\theta\ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\dot{\theta}^2\right] \Rightarrow N_x \ (\text{en } 3.1)$$
$$\dot{y}_G = -L/2\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{y}_G = -L/2\left[\operatorname{sen}\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2\right] \Rightarrow N_y \ (\text{en } 3.2)$$

en (*) $$\vec{\tau}_G = -\frac{L}{2}\cos\theta \cdot mL\left[\cos\theta\ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\dot{\theta}^2\right] + \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\left[2mg - mL(\operatorname{sen}\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2)\right]$$

$$\tau_G = -\frac{mL^2}{2}(\cos^2\theta\ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\theta}^2) + mgL\operatorname{sen}\theta - \frac{mL^2}{2}(\operatorname{sen}^2\theta\ddot{\theta} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\theta}^2) = \frac{mL^2}{2}\ddot{\theta}$$

$$-\frac{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{2}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{L}\operatorname{sen}\theta = \frac{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{2}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta \quad (4.1)$$

---

c) $$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = -\frac{g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 - \frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (4.2)$$

$$N_x(\theta_D) = 0 \Rightarrow mL\left[\cos\theta_D\,\ddot{\theta}(\theta_D) - \operatorname{sen}\theta_D\,\dot{\theta}^2(\theta_D)\right] = 0$$

$$0 = \cancel{mL}\left[\cos\theta_D \cdot \frac{g}{L}\cancel{\operatorname{sen}\theta_D} - \cancel{\operatorname{sen}\theta_D}\left(-\frac{2g}{L}(\cos\theta - \underbrace{\cos\theta^*}_{\sqrt{2}/2})\right)\right] \quad (\theta_D \neq 0)$$

$$\frac{\cancel{g}}{\cancel{L}}\cos\theta_D = \frac{2\cancel{g}}{\cancel{L}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\theta_D\right) \Rightarrow 3\cos\theta_D = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\cos\theta_D = \frac{\sqrt{2}}{3}}$$