UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

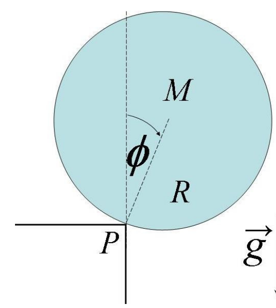
FI21A-2 MECANICA 2005-1
Prof. Patricia Sotomayor C.

EXAMEN

1 de junio de 2005
Tiempo: 2:30 horas

Problema 1:

Un disco de radio R, masa total M y momento de inercia $I = \frac{MR^2}{\alpha}, (\alpha < 1)$ con respecto al punto de apoyo, cae sin deslizar desde el borde P de una mesa, como se muestra en la figura. Si en el instante inicial $\phi = 0$ y $\dot{\phi} = 0$, determine:



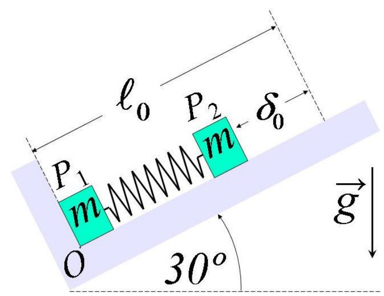
a) $\dot{\phi}$ en función de ϕ

b) Las componentes de la fuerza de contacto como función de ϕ

c) Si se sabe que comienza a deslizar cuando $\phi > 30º$, obtenga el valor del coeficiente de roce estático μ_e. Asegúrese que para $\phi = 30º$ el cuerpo aún no desliza.

Problema 2:

Las partículas P_1 y P_2, ambas de masa m, pueden moverse sin roce sobre un plano inclinado 30^o respecto de la horizontal. El resorte que las une es ideal, de largo natural ℓ_o y constante elástica k. Si inicialmente las partículas están en reposo, con el resorte comprimido en $\delta_o = \frac{2mg}{k}$., determine:



Para el instante en que P_1 se despega de la pared lateral:

a) Estiramiento del resorte
b) Rapidez de P_2

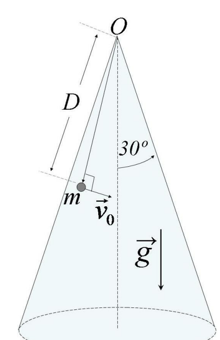
Para el movimiento del sistema después del despegue de P_1:

c) Máxima altura respecto al punto O alcanzada por el Centro de Masa
d) Máximo estiramiento del resorte.

Indicación: **Suponga que después del despegue de P_1, ella no vuelve a tomar contacto con la pared lateral.**

Problema 3:

Una partícula de masa m se suelta <u>en el interior</u> de una superficie cónica de semiángulo 30º, a una distancia D del vértice O, con velocidad $\vec{v}_0$ horizontal. El roce entre la masa y la superficie es despreciable.



Se pide:

a) La rapidez inicial v_0 que se le debe imprimir a la partícula para que se despegue de la superficie cuando se encuentra a una distancia $2D$ de O

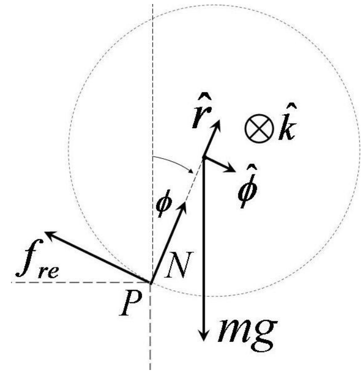
b) La velocidad de la partícula en función de su distancia a O, mientras se mantiene en contacto con la superficie cónica.

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\,\text{sen}^2\theta\ \dot{\phi}\right)\hat{\phi}$$

Solución Problema 1:

Las fuerzas que actúan sobre el disco están indicadas en la figura.



a) la velocidad angular $\dot{\phi}(\phi)$:

Por condiciones del enunciado, el punto P es fijo. Por lo tanto, se verifica la relación:

$$\vec{\tau}_P = \frac{d\vec{\ell}_P}{dt}$$

donde:

$\vec{\tau}_P$: es el torque total que actúa sobre el disco con respecto al punto P

$\vec{\ell}_P$: es el momento angular del disco con respecto al punto P

El momento angular $\vec{\ell}_P$ está dado por: $\vec{\ell}_P = \dfrac{MR^2}{\alpha}\,\dot{\phi}\,\hat{k}$

Por otra parte, la única fuerza que realiza torque con respecto al punto P es el peso, ya que las fuerzas de contacto $\vec{f}_{re}$ y $\vec{N}$ actúan en el punto P

Es decir: $\vec{\tau}_P = R\,\hat{r} \times Mg\,(-\cos\phi\,\hat{r} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}) = R\,M\,g\operatorname{sen}\phi\,\hat{k}$

Por lo tanto: $R\,M\,g\operatorname{sen}\phi = \dfrac{MR^2}{\alpha}\ddot{\phi}$ => $\ddot{\phi} = \dfrac{\alpha\,g}{R}\operatorname{sen}\phi$ (1)

=> $\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}_0 - \dfrac{2\alpha\,g}{R}[\cos\phi - \cos\phi_0]$

donde:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \phi(0) = 0\\ \dot{\phi}_0 &= \dot{\phi}(0) = 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\phi}^2 = \frac{2\alpha g}{R}[1-\cos\phi]} \qquad (2)$$

b) Las fuerzas de contacto:

Sabemos que para el sistema también se cumple que: $\Sigma\vec{F}^{ext} = M\,\vec{a}_G$, y que mientras el disco no deslice, el centro de masa describe un movimiento circunferencial de radio R, en torno a P.

$$\Sigma\vec{F}^{ext} = N\,\hat{r} + f_{re}(-\hat{\phi}) + Mg\,(-\cos\phi\,\hat{r} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi})$$
$$M\,\vec{a}_G = M(-R\,\dot{\phi}^2\,\hat{r} + R\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi})$$

de donde: $N = M(g\cos\phi - R\,\dot{\phi}^2)$. Reemplazando (2) => $N = Mg\,[\cos\phi - 2\alpha(1-\cos\phi)]$

$f_{re} = M(g\operatorname{sen}\phi - R\,\ddot{\phi})$. Reemplazando (1) => $f_{re} = Mg\,(1-\alpha)\operatorname{sen}\phi$

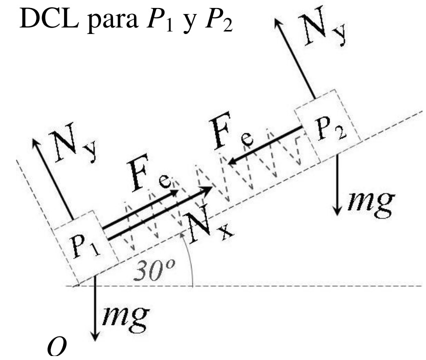
c) El coeficiente μ_e

Sabemos que el valor máximo de la fuerza de roce estático es $f_{re\,MÁX} = \mu_e\,N$. Por enunciado, esto ocurre para $\phi = 30^\circ$. Entonces:

$$Mg\,(1-\alpha)\operatorname{sen}30^\circ = \mu_e\,Mg\,[\cos 30^\circ - 2\alpha(1-\cos 30^\circ)] \quad \Rightarrow \quad \mu_e = \frac{1-\alpha}{\sqrt{3} - 2\alpha(2-\sqrt{3})}$$

Solución Problema 2:

a) Estiramiento del resorte:



Sean x_1 y x_2 las respectivas distancias de las partículas P_1 y P_2, medidas desde el punto *O,* en dirección paralela al resorte.

Ecuación del movimiento para P_1 :

$$m\,\ddot{x}_1 = N_x - mg\ \text{sen}\,30^\circ + F_e \qquad (1)$$

Mientras P_1 no despegue se verifica que:

$\ddot{x}_1 = 0$ y $\vec{F}_e = k(x_2 - l_0)\,\hat{x}$

Sea t^* el instante en que se produce el despegue de P_1, entonces $Nx\,(t^*) = 0$. Sea x^* la posición de P_2 en t^*. Imponiendo estas condiciones en (1):

$0 = 0 - \dfrac{mg}{2} + k(x^* - l_0)$ => $\boxed{(x^* - l_0) = \dfrac{mg}{2k} = \delta^*}$ es el estiramiento del resorte en ese instante

b) Rapidez de P_2 en t^*

Para el sistema la $EMT = K + U = cte.$

En $t = 0$: $EMT = \dfrac{1}{2}k\ \delta_0^2 + mg\dfrac{l_0 - \delta_0}{2}$

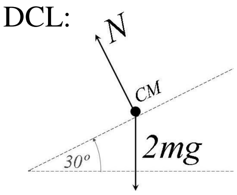
En $t = t^*$: $EMT = \dfrac{1}{2}k\ \delta^{*2} + mg\dfrac{l_0 + \delta^*}{2} + \dfrac{1}{2}m\,v^{*2}$

Reemplazando los valores de δ y δ^* e igualando las dos expresiones de la *EMT*, obtenemos:

$$\frac{1}{2}m\,v^{*2} = \frac{5}{8}\frac{(mg)^2}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^{*2} = \frac{5}{4}\frac{m\,g^2}{k}} \qquad (2)$$

c) Altura máxima del centro de masa:

Después del despegue, las fuerzas externas que actúan son la normal y el peso total, indicadas en el DCL siguiente



Por lo tanto, la ecuación del movimiento para el centro de masa es:

$$2m\,\ddot{x}_G = -2mg\ \text{sen}\,30^\circ \quad \Rightarrow \ddot{x}_G = -\frac{1}{2}g$$

=> $\dot{x}_G = \dot{x}_G(0) - \dfrac{1}{2}g\,t$, donde: $\dot{x}_G(0) = \dfrac{1}{2}v^*$ => $\dot{x}_G = \dfrac{1}{2}\left[v^* - g\,t\right]$ (3)

=> $x_G = x_G(0) + \dfrac{1}{2}v^*t + \dfrac{1}{4}g\,t^2$, donde $x_G(0) = \dfrac{1}{2}\left[l_0 + \delta^*\right] = \dfrac{l_0}{2} + \dfrac{mg}{4k}$

=> $x_G = \dfrac{l_0}{2} + \dfrac{mg}{4k} + \dfrac{1}{2}v^*t + \dfrac{1}{4}g\,t^2$ (4)

El centro de masa ha recorrido la distancia máxima cuando $\dot{x}_G = 0$. Sea t_M el instante en que esto ocurre. Entonces, despejando t_M de (3) se obtiene: $t_M = \dfrac{v^*}{g}$

reemplazando en (4) => $(x_G)_{MÁX} = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{4k} + \frac{v^*}{2}\frac{v^*}{g} - \frac{g}{4}\frac{v^{*2}}{g^2}$

reemplazando v^* de (2), obtenemos: $(x_G)_{MÁX} = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{k}\left[\frac{1}{4} + \frac{5}{8} - \frac{5}{16}\right] = \frac{l_0}{2} + \frac{9mg}{16k}$

Por lo tanto, la altura máxima alcanzada por el centro de masa es: $(H_G)_{MÁX} = \left[\frac{l_0}{2} + \frac{9mg}{16k}\right]\text{sen}\,30º$

$$\boxed{(H_G)_{MÁX} = \frac{l_0}{4} + \frac{9mg}{32k}}$$

d) Estiramiento máximo del resorte:

Aplicamos conservación de EMT para el sistema, después del despegue:

$EMT = K + U = cte$

=> $K_G + K_{rel/CM} + U^g + U^e = cte$, donde $K_G + U^g$ es también constante.

=> $K_{rel/CM} + U^e = cte$

Evaluando en t^*:

$$K^*_{rel/CM} = \frac{1}{2}m\,(v^* - \frac{v^*}{2})^2 + \frac{1}{2}m\,(0 - \frac{v^*}{2})^2 = \frac{5}{16}\frac{(mg)^2}{k}$$

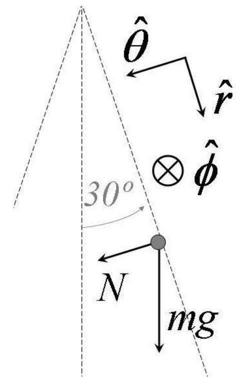
$$U^{e*} = \frac{1}{2}k\,\delta^{*2} = \frac{1}{8}\frac{(mg)^2}{k}$$

=> $K_{rel/CM} + U^e = \frac{7}{16}\frac{(mg)^2}{k}$, el estiramiento máximo ocurre cuando $K_{rel/CM} = 0$.

=> $U^e_{MÁX} = \frac{1}{2}k\,\delta^2_{MÁX} = \frac{7}{16}\frac{(mg)^2}{k}$ => $\boxed{\delta_{MÁX} = \sqrt{\frac{7}{8}}\frac{mg}{k}}$

<u>Solución Problema 3:</u>

Las ecuaciones escalares del movimiento de la partícula, en coordenadas esféricas son:



$$m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,150^\circ) = mg\,\cos 30^\circ$$

$$m(-r\,\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,150^\circ \cos 150^\circ) = N - mg\,\mathrm{sen}\,30^\circ$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\mathrm{sen}^2\,150^\circ\,\dot{\phi}) = 0$$

o bien:

$$m\,(\ddot{r} - \frac{1}{4} r\,\dot{\phi}^2) = mg\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

$$m\,r\,\dot{\phi}^2\,\frac{\sqrt{3}}{4} = N + \frac{mg}{2} \qquad (2)$$

$$r^2\,\dot{\phi} = cte \qquad (3)$$

a) Condición de despegue:

Evaluamos la constante de la ecuación (3) en el instante inicial:

$$r(0) = D$$

$$\dot{\phi}(0) = \frac{v_0}{D\,\mathrm{sen}\,30^\circ} = \frac{2v_0}{D} \qquad \Rightarrow \quad r^2\,\dot{\phi} = 2D\,v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(r) = \frac{2D\,v_0}{r^2} \qquad (4)$$

Reemplazando en (2) y despejando N: $\Rightarrow N = m\left[\frac{v_0^2\,D^2\sqrt{3}}{r^3} - \frac{g}{2}\right]$

Se pide que se despegue en $r = 2D$ => $N(r = 2D) = 0$ => $\boxed{v_0^2 = \frac{4g\,D}{\sqrt{3}}}$ (5)

b) la velocidad de la partícula:

$\vec{v}\,(r) = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,150^\circ\,\hat{\phi}$, de (4): $\Rightarrow \vec{v}\,(r) = \dot{r}\,\hat{r} + \frac{D\,v_0}{r}\,\hat{\phi}$ (6)

tenemos $\dot{\phi}(r)$, entonces sólo falta $\dot{r}(r)$

Reemplazando en (1): $\ddot{r} - \frac{1}{4} r\,\frac{4\,v_0^2\,D^2}{r^4} = g\,\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{v_0^2\,D^2}{r^3} + g\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \dot{r}\,\frac{d\,\dot{r}}{dr}$

Integrando: $\frac{\dot{r}^2}{2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{v_0^2\,D^2}{r^2} - \frac{v_0^2\,D^2}{D^2}\right] + \frac{g\sqrt{3}}{2}(r - D) \Rightarrow \dot{r}^2 = v_0^2\left[1 - \frac{D^2}{r^2}\right] + g\sqrt{3}[\,r - D]$

Reemplazando $\dot{r}\,(r)$ en (6), y reemplazando además v_0 de (5), obtenemos:

$$\boxed{\vec{v}\,(r) = 2\sqrt{\frac{g\,D}{\sqrt{3}}}\left[\left[1 - \frac{D^2}{r^2} + 3\frac{r}{D} - 3\right]\hat{r} + \frac{D}{r}\,\hat{\phi}\right]}$$

Nota: También podía obtenerse la <u>rapidez</u> $v(r)$ por energía, e igualándola al módulo del vector de la ecuación (6) se podía despejar la expresión de $\dot{r}\,(r)$, para reemplazarla en la expresión del vector velocidad.