UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FI 21A-2 MECANICA 2004-2

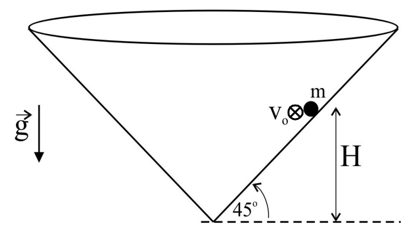
Prof. Patricia Sotomayor C.

EXAMEN

27 de noviembre de 2004
Tiempo: 2:30 horas

Problema 1

Una partícula de masa m se mueve sin roce por el interior de un cono de semiángulo 45º y eje vertical. Si la partícula está inicialmente a una altura H del vértice del cono y su velocidad inicial es horizontal, se pide:

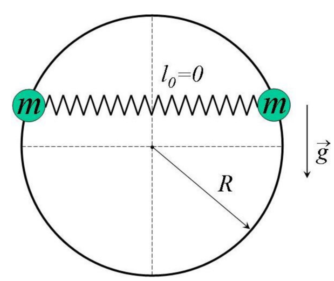


a) Determinar la rapidez inicial tal que la partícula se mantenga rotando a la altura H.

b) Si la rapidez inicial de la partícula es el doble de la encontrada en (a), determine la altura máxima alcanzada por la partícula.

Problema 2

Dos partículas de igual masa m pueden deslizar sin roce por un aro vertical de radio R. Las partículas están unidas por un resorte de largo natural cero y constante elástica k. Considerando que la simetría del problema permite que el resorte se mantenga siempre horizontal, se pide:

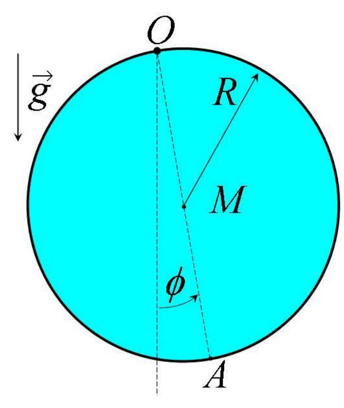


a) Determinar las posiciones de equilibrio del sistema

b) Analizar la estabilidad de las posiciones de equilibrio, dependiendo de la relación entre los parámetros del enunciado.

Problema 3

Un disco homogéneo de masa M, radio R y espesor despreciable, puede girar en torno a un punto O, fijo, ubicado en el borde del disco. Si el disco se hace oscilar en su plano, soltándolo desde el reposo, con el diámetro OA formando un ángulo $\phi = \pi/3$ con la vertical, determine:



a) La velocidad angular del disco en función de ϕ

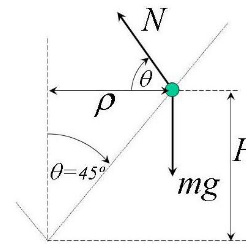
b) La reacción que le ejerce el eje de giro, en función de ϕ

c) Como varían sus resultados si el disco se hace oscilar desde el reposo soltándolo ahora en la posición en que el plano del disco forma un ángulo $\pi/3$ con la vertical (y con $\phi = 0$)

Considere despreciable el roce con el aire en ambos casos

Solución Pregunta 1:

a) La rapidez inicial tal que mantiene la altura



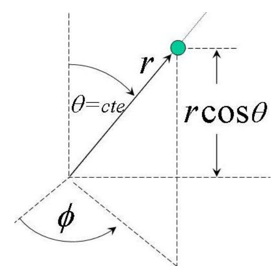
Para que se mantenga rotando a la altura H, la aceleración de la partícula debe estar contenida en su plano de rotación. Entonces, la proyección vertical de la fuerza externa debe ser cero.

Es decir: $N \operatorname{sen}\theta - mg = 0$ (1)

Por geometría, la partícula debe realizar un movimiento circular de radio $\rho = H\ \mathrm{tg}(45º) = H$

Entonces: $N\cos\theta = m\dfrac{v_0^2}{\rho} = m\dfrac{v_0^2}{H}$ (2) De (1)/(2) => $\mathrm{tg}(45º) = 1 = \dfrac{g\,H}{v_0^2}$ => $\boxed{v_0^2 = gH}$

b) Cambiando la rapidez inicial



La energía del sistema se conserva ($EMT = cte$). En coordenadas esféricas,

con $\theta = cte = 45º$: $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\operatorname{sen}(45º)\dot{\phi}\,\hat{\phi} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{\phi}\,\hat{\phi}$

$$=> EMT = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \frac{r^2}{2}\dot{\phi}^2\right] + mg\ r\cos\theta$$

En el instante inicial: $v_0' = 2v_0 = 2\sqrt{gH}$ => $EMT_i = \dfrac{1}{2}m\,4gH + mg\ H = 3mg\,H$

En el instante final llega a $r_{MÁX}$ => $\dot{r}_f = 0$ => $\dfrac{1}{2}m\,\dfrac{{r_f}^2}{2}\dot{\phi}_f^{\,2} + mg\ r_f\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3mgH$ (3)

Por otra parte, dado que no hay fuerzas en la dirección $\hat{\phi}$ => $a_\phi = 0$ durante todo el movimiento.
Es decir:

$\dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta\right) = 0$ => $r^2\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta = cte$; como $\theta = cte$ => $r^2\dot{\phi} = cte$, durante todo el movimiento.

inicialmente:
$$\left.\begin{array}{l} r_i = \dfrac{H}{\cos(45º)} = H\sqrt{2} \\[2ex] \dot{\phi}_i = \dfrac{v_0'}{H\tan(45º)} = \dfrac{2\sqrt{gH}}{H} \end{array}\right\} \Rightarrow\quad r^2\dot{\phi} = 4H^2\sqrt{\frac{g}{H}} \quad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{4H^2}{r^2}\sqrt{\frac{g}{H}} \qquad (4)$$

(4) en (3)=> $EMT = \dfrac{1}{2}m\,\dfrac{{r_f}^2}{2}\dfrac{4gH^3}{{r_f}^4} + mg\dfrac{r_f\sqrt{2}}{2} = mgH\left[\dfrac{H^2}{{r_f}^2} + \dfrac{r_f\sqrt{2}}{2H}\right] = 3mgH$ => $\dfrac{H^2}{{r_f}^2} + \dfrac{r_f}{H}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3$ (*)

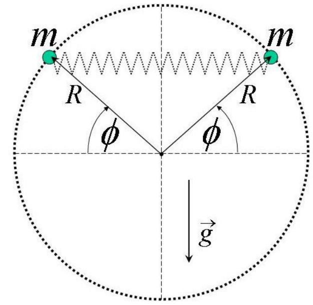
Sea h_f la altura que alcanza => $h_f = r_f\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y haciendo el cambio de variable: $\lambda = \dfrac{h_f}{H}$, la ecuación (*) se puede escribir como: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2 = 0$

Conocemos una raíz (λ=1) => factorizando por (λ–1) el polinomio queda: $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 0$, cuyas otras raíces son: $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$.

Por lo tanto la solución buscada es: $\boxed{h_f = H\left(1 + \sqrt{3}\right)}$

<u>Solución Pregunta 2</u>:

a) Posiciones de equilibrio



El potencial del sistema en función de ϕ se puede expresar como:

$$U(\phi)=\frac{1}{2}k\,(2R\cos\phi)^2+2mg\,R\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\frac{dU}{d\phi}=2R\,\left[2kR\cos\phi\,(-\mathrm{sen}\,\phi)+mg\cos\phi\right]=2R\cos\phi\,(mg-2kR\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

$$\left.\frac{dU}{d\phi}\right|_{\phi_e}=0\ \Rightarrow \begin{cases}\cos\phi_e=0 & \Rightarrow \phi_{e1,e2}=\pm\pi/2\\ \mathrm{sen}\,\phi_e=\dfrac{mg}{2kR} & \Rightarrow \phi_{e3}=\mathrm{Arcsen}\left[\dfrac{mg}{2kR}\right]\end{cases}$$

<u>Notemos que: ϕ_{e3} existe y $\phi_{e3}\neq\phi_{e1}$ ssi $mg<2kR$</u>

b) Estabilidad de las posiciones de equilibrio

Para determinar la estabilidad en cada posición de equilibrio evaluamos:

$$\frac{d^2U}{d\phi^2}=2R\,\left[(-\mathrm{sen}\,\phi)(mg-2kR\,\mathrm{sen}\,\phi)+\cos\phi(-2kR\cos\phi)\right]=2R\,\left[2kR\,(2\,\mathrm{sen}^2\phi-1)-mg\,\mathrm{sen}\,\phi\right]$$

i) para ϕ_{e1} (ambas partículas en el extremo superior del aro)

$$\left.\frac{d^2U}{d\phi^2}\right|_{\phi_{e1}}=2R\,\left[2kR\,(2\,\mathrm{sen}^2(\pi/2)-1)-mg\,\mathrm{sen}(\pi/2)\right]=2R\,\left[2kR-mg\right]\gtrless 0$$

por lo tanto: Si $2kR-mg>0$, lo que ocurre si $k>\dfrac{mg}{2R}$ => la posición ϕ_{e1} es estable

Si $2kR-mg<0$, lo que ocurre si $k<\dfrac{mg}{2R}$ => la posición ϕ_{e1} es inestable

ii) para ϕ_{e2} (ambas partículas en el extremo inferior del aro)

$$\left.\frac{d^2U}{d\phi^2}\right|_{\phi_{e2}}=2R\,\left[2kR\,(2\,\mathrm{sen}^2(-\pi/2)-1)-mg\,\mathrm{sen}(-\pi/2)\right]=2R\,\left[2kR+mg\right]>0 \text{ siempre}$$

Por lo tanto la posición ϕ_{e2} siempre es estable.

iii) para ϕ_{e3} (ambas partículas en alguna posición $0<\phi<\pi/2$), ϕ_{e3} existe y $\phi_{e3}\neq\phi_{e1}$ ssi $k>\dfrac{mg}{2R}$ (*)

$$\left.\frac{d^2U}{d\phi^2}\right|_{\phi_{e3}}=2R\left[2kR\left(2\left[\frac{mg}{2kR}\right]^2-1\right)-mg\left[\frac{mg}{2kR}\right]\right]=\frac{2kR}{k}\left[2\frac{(mg)^2}{2kR}-2kR-\frac{(mg)^2}{2kR}\right]=\frac{1}{k}\left[(mg)^2-(2kR)^2\right]$$

pero, de (*) para que ϕ_{e3} exista se debe cumplir que $k>\dfrac{mg}{2R}$ => $2kR>mg$ => $(mg)^2-(2kR)^2<0$

Por lo tanto, si la posición de equilibrio ϕ_{e3} existe => es inestable

<u>En resumen</u>:

- Si el resorte es muy blando existen sólo dos posiciones de equilibrio: una estable en el extremo inferior y una inestable en el extremo superior.
- Si el resorte es muy duro existen tres posiciones de equilibrio: una estable en el extremo inferior, una inestable entre el ecuador y el extremo superior, y una inestable en el extremo superior.

Nota: No se pedía analizar la estabilidad de la posiciones de equilibrio cuando $\left.\dfrac{d^2U}{d\phi^2}\right|_{\phi_e}=0$

Solución Pregunta 3:

En ambos casos (giro en el plano del disco y giro en el plano perpendicular al disco) se cumple que:

$$\vec{F}^{ext} = M\,\vec{a}_G \qquad (1)$$

$$\vec{\tau}_G = I_G\,\dot{\vec{\omega}} \qquad (2)$$

En ambos casos el CM del disco describe una circunferencia de radio R.

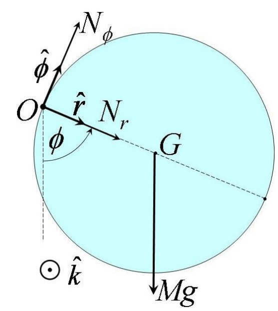
a) Velocidad angular del disco (movimiento en el plano del disco)

Para describir el movimiento en el plano del disco, usamos las coordenadas polares de la figura.

Si bien el disco rota en torno al punto O, los elementos de masa del disco tienen una rotación relativa al CM, con la misma velocidad angular $\dot{\phi}$.

Definiendo ρ como la distancia entre los elementos de masa del disco y el eje de rotación relativa al CM (que pasa por G), obtenemos:

$$I_G = \iint_S \rho^2 dm = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho^2\,\rho\,d\rho\,d\phi = \frac{2\pi M}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3\,d\rho = \frac{M\,R^2}{2}$$



Evaluación de los términos de (1):

Las F^{ext} sobre el disco se indican en la figura => la ecuación (1) queda:

$$(N_r + Mg\cos\phi)\,\hat{r} + (N_\phi - Mg\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\hat{\phi} = M\,(-R\dot{\phi}^2\,\hat{r} + R\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi})$$

=> $$N_r + Mg\cos\phi = -M\,R\dot{\phi}^2 \qquad (3.1)$$

$$N_\phi - Mg\,\mathrm{sen}\,\phi = MR\ddot{\phi} \qquad (3.2)$$

Evaluación de los términos de (2):

La única fuerza que hace torque c/r a G es R_ϕ

=> ecuación (2) queda: $\vec{\tau}_G = (-R\,\hat{r})\times(N_\phi\,\hat{\phi}) = -R\,N_\phi\,\hat{k} = \dfrac{M\,R^2}{2}\ddot{\phi}\,\hat{k}$ => $N_\phi = -\dfrac{M\,R}{2}\ddot{\phi}$ (4)

(4) en (3.2) => $-Mg\,\mathrm{sen}\,\phi = MR\ddot{\phi} + M\dfrac{R}{2}\ddot{\phi} = \dfrac{3}{2}M\,R\ddot{\phi}$ => $\ddot{\phi} = -\dfrac{2g}{3R}\mathrm{sen}\,\phi$, en (4) => $\boxed{N_\phi = \dfrac{Mg}{3}\mathrm{sen}\,\phi}$

Por otra parte, $\ddot{\phi} = \dot{\phi}\dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}$ => $\displaystyle\int_0^{\dot{\phi}}\dot{\phi}\,d\dot{\phi} = \int_{\pi/3}^{\phi}\frac{2g}{3R}\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi$ => $\dfrac{\dot{\phi}^2}{2} = \dfrac{2g}{3R}\left[\cos\phi - \dfrac{1}{2}\right]$ => $\boxed{\dot{\phi}^2 = \dfrac{2g(2\cos\phi - 1)}{3R}}$

b) La reacción que ejerce el eje:

Falta calcular N_r. Reemplazando el resultado de $\dot{\phi}^2$ en (3.1) obtenemos:

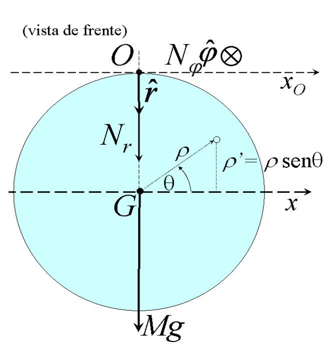
$N_r = -Mg\cos\phi - M\,R\dfrac{g(4\cos\phi - 2)}{3R} = Mg(-\cos\phi - \dfrac{4}{3}\cos\phi) + \dfrac{2}{3}Mg$ => $\boxed{N_r = \dfrac{Mg}{3}(2 - 7\cos\phi)}$

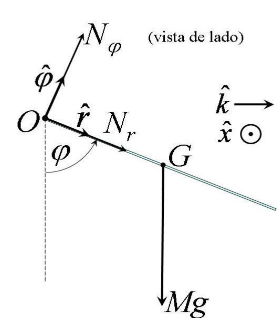
c) Cambio de resultados al variar el eje de rotación:

Si el eje de rotación es $\perp$a $\hat{k}$, las ecuaciones son las mismas pero cambia el momento de inercia.

Como se muestra en la figura, denominamos:

- x_O: nuevo eje de rotación del disco
- x: eje de rotación del disco, relativa al CM
- φ: variable angular que mide el nuevo giro del disco.
- ρ': distancia entre los elementos de masa del disco y el eje x





El momento de inercia c/r al eje x es:

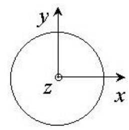
$$I'_G = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \rho'^2\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3\, \mathrm{sen}^2\theta\; d\rho\, d\theta \;= \frac{M}{\pi R^2}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3\;\; d\rho \;= \frac{M\pi}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3\;\; d\rho \;= \frac{M\,R^2}{4}$$

Reemplazando el valor de I'_G en las ecuaciones originales, y resolviéndolas llegamos a:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g(2\cos\varphi - 1)}{5R} \;\; ; \;\; N_\varphi = \frac{Mg}{5}\mathrm{sen}\,\varphi \qquad N_r = \frac{Mg}{5}(4-13\cos\varphi)$$

Notas: 1. La parte (a) podía resolverse también por energía.

2. En (c) no era necesario resolver las ecuaciones, si se explicaba claramente la respuesta.
3. En vez de calcular el nuevo momento de inercia se puede ocupar la siguiente relación:



$$I_x + I_y = I_z$$
$$I_x = I_y \;\; => I_x = I_z / 2$$

d) Determinación de la velocidad angular del disco (por energía)

Trabajan sólo fuerzas conservativas =>$EMT = cte = \frac{1}{2}M\,V_G^2 + \frac{1}{2}I_G\,\dot{\phi}^2 - Mg\,R\cos(\phi)$

Inicialmente: $EMTi = -Mg\,R\cos(\pi/3) = -\frac{MgR}{2}$

Durante el movimiento: $EMT(\phi) = \frac{1}{2}M\,(R\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\phi}^2 - Mg\,R\cos(\phi)$

$$EMT = cte \;\; => \;\; \frac{MR}{4}(2R\dot{\phi}^2 + R\dot{\phi}^2 - 4g\;\cos(\phi)) = -\frac{MgR}{2} \;\; => \;\; \boxed{\dot{\phi}^2 = \frac{2g(2\cos(\phi)-1)}{3R}}$$