Auxiliar 5 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 07 de Septiembre, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = -xf(x), \quad g'(x) = xg(x), \quad f(0) = g(0) = 1$$

a) Pruebe que $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x) > 0, \ g(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
b) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.
c) Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.
d) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un $\xi \in (0, x)$ tal que $f(x) = -f''(\xi)$
e) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.
f) Deduzca que $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir de todos los pasos anteriores.

Pregunta 2.

a) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$

Pruebe que si h es continua en $x = 0$, entonces es continua en todo punto.

b) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

b.1) Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}^+$.
b.2) Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcule $f'(x)$.
b.3) Determine los puntos de continuidad de f' en $\mathbb{R}^+$
b.4) Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es una función continua en 1. Calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$ utilizando la fórmula de Leibniz para $(x - 1)f(x)$.

c) Pruebe que la ecuación $f(x) = ax^{2n+1} + bx^{2m+1} - 1$ con $n, m \in \mathbb{N}^*, \ a, b > 0$ posee una única solución.

Pregunta 3.

a) Diremos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de **variación acotada** sobre $[a, b]$ si existe una constante $M \geq 0$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq M$$

donde $(t_i)_{i=1}^n \subset [a, b]$ es una colección cualquiera de puntos tal que: $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$.
Demuestre que si f es derivable en $[a, b]$ y f' es acotada en $[a, b]$ entonces f es de variación acotada.
Indicación: Use TVM apropiadamente.

b) Sea f continua en $[a, b]$ con $a > 0$, y diferenciabl en (a, b). Pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(c) - c'f(c)$$

Pregunta 4.

a) Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ hasta el orden 3, en torno a $x = 0$ y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$

b) Este problema está dedicado a determinar el cono de superficie mínima circunscrito a una esfera de radio $R > 0$ fijo. Para ello:

b.1) Considere la esfera de radio $R > 0$ y el cono de altura h y base circular de radio r circunscrito a la esfera. Pruebe que:

$$\frac{h - R}{R} = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r}$$

b.2) Determine las dimensiones del cono (h y r) tal que se cumpla la condición de poseer superficie (manto y base) mínima estando circunscrito a la esfera. Indique el valor de la superficie en tal caso.