Auxiliar 9 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 12 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, \quad x^2 + y^2 - 2ry \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

a) Grafique la región $\mathcal{R}$
b) Calcule el volumen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.
c) Calcule el volumen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY.

Pregunta 2. Para $\alpha \in (0, 1)$, denoramos por $\mathcal{R}$ la región encerrada por la curva x^α, el eje OY y la recta tangente a x^α en el punto $x = 1$

a) Demostrar que el área de la región $\mathcal{R}$ está dada por $A = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$
b) Demostrar que el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY está dado por $V = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$
c) En el caso $\alpha = \frac{2}{3}$ calcule el perímetro de la región $\mathcal{R}$

Pregunta 3.

a) La figura adjunta muestra un sólido de base circular de radio a. Cada plano perpendicular al diametro AB intersecta al sólido en un cuadrado. Exprese el volumen del sólido como una integral y calcúlela.

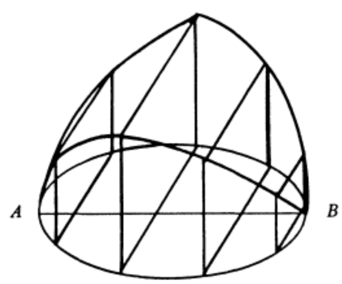

Figura 1: Sólido a considerar

b) Determine el volumen de la intersección de los cilindros de la figura. Suponga que los radios de ambos cilindros son $a > 0$.
<u>Indicación:</u> Estudie la intersección del sólido con planos horizontales.

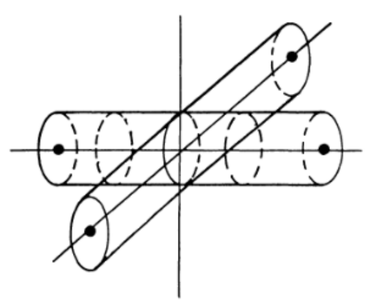

Figura 2: Intersección de cilindros.

Pregunta 4.

a) Considere la función $f(x) = 2x - x^2$ y la región R definida por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Se pide determinar sobre el gráfico de $f(x)$ el punto $P = (x_0, f(x_0))$ de modo que la recta que une el origen con P divida el área de la región $\mathcal{R}$ en dos partes iguales.

b) Determinar que función f continua, tal que $f(x) > 0$ para $x > 0$, satisface la propiedad siguiente: $\forall x \in [0, \infty)$ se define $R_x = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq t \leq x, 0 \leq y \leq f(t)\}$ y al hacer rotar esta región en torno a los ejes OX y OY los volúmenes de revolución V_{OX} y V_{OY} así obtenidos son iguales.

Pregunta 5. Pruebe que el Teorema del valor medio para derivadas (asumiendo $g > 0$) implica el Teorema del valor medio generalizado para integrales. Pruebe que la reciproca es cierta si además se asume que f, g son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ y $g' > 0$.

Pregunta 6.

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, son tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2(x)dx = 1$, demuestre que:

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

b) Encuentre una fórmula de recurrencia para la integral

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(ax) dx, \quad a \neq 0$$

sabiendo que es de la forma $I_n = p_n \cdot I_{n-1} + q_n \cdot I_{n-2}$, $n \geq 2$, donde p_n y q_n son coeficientes dependientes de $n \in \mathbb{N}$

c) Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \int_1^x \sin(t^2) dt}{\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2 - 1) dt}$$