MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Pauta Auxiliar 1.

P1. Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\big((1-a)x\big)}{x} & \text{si } x < 0 \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\big(a(x-1)\big)}{\ln(x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) ¿Es f continua en los intervalos $(-\infty,0)$; $(0,1)$ y $(1,\infty)$?

Sí, basta mencionar que por álgebra y composición de funciones continuas f es contínua en dichos intervalos.

(b) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 0.

Para que f sea continua en 0, debe cumplir la definición, en este caso es más cómdo trabajar con la definición por límites, es decir debe imponerse que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = b(0-a)^2 = ba^2$. Para esto se deben estudiar los límites laterales, teniendo cuidado con cuál rama de la función considerar:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} b(x-a)^2 = b(0-a)^2 = ba^2.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\big((1-a)x\big)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\big((1-a)x\big)}{(1-a)x} \cdot (1-a) = 1\cdot(1-a).$$

Como se quiere que la función sea continua en 0 los límites por la derecha e izquierda deben ser iguales, por lo que la relación pedida es: $ba^2 = 1-a$.

(c) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 1.

En forma análoga a la parte (b) deben estudiarse los límites laterales e imponer que sean iguales a $f(1)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}\big(a(x-1)\big)}{\ln(x)} = a\cdot \frac{\operatorname{sen}\big(a(x-1)\big)}{a(x-1)} \cdot \frac{(x-1)}{\ln(x)} = a\cdot 1\cdot 1 = a.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} b(x-a)^2 = b(1-a)^2.$$

Como se quiere que la función sea continua en 1 los límites por la derecha e izquierda deben ser iguales, por lo que la relación pedida es: $b(1-a)^2 = a$.

(d) Encuentre los valores de a y b de tal forma que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Por la parte (a) la función es continua en los intervalos $(-\infty,0)$; $(0,1)$ y $(1,\infty)$, es decir en $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Por la parte (b) la función es continua en $\overline{x}=0$ ssi $ba^2=1-a$. (1)

Por la parte (c) la función es continua en $\overline{x}=1$ ssi $b(1-a)^2=a$. (2)

Para que sea continua en $\overline{x}=0$ y $\overline{x}=1$, deben cumplirse simultaneamente (1) y (2) es decir los valores de a y b serán los que resuelvan el sistema de ecuaciones (1) y (2). Haciendo $(1)\div(2)$ se pueden despejar los valores pedidos $a=\frac{1}{2}$ y $b=2$.

P2. Considere la función definida para $x\neq 0$ como $f(x)=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})$ y $f(0)=\alpha$. Muestre que independiente del valor de α, f no es continua en 0.

La definición de continuidad indica que $\forall(x_n)\subseteq \mathrm{A},\ x_n\to\overline{x}\Rightarrow f(x_n)\to f(\overline{x})$, por lo que para mostrar que f no es continua en 0, bastará encontrar un par de sucesiones que no cumplan la definición. Ojo que las sucesiones DEBEN tender a 0, pues ese es el punto que se está estudiando.

$x_n=\dfrac{1}{n}\to 0$ y $f(x_n)=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x_n})=\operatorname{sen}(\pi n)=0\to 0$, es decir $f(x_n)\to 0$.

$y_n=\dfrac{1}{2n+\frac{1}{2}}==\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x_n})=\operatorname{sen}(\pi(2n+\frac{1}{2}))=\operatorname{sen}(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})=1\to 1$, es decir $f(y_n)\to 1$.

Con lo cual NO se cumple que para toda sucesión se cumpla la definición de continuidad.

Nota: hay infinitas sucesiones más que sirven para probar la discontinuidad.

P3. (a) Sea $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ una función que satisface la propiedad: $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$.

Muestre que si f es continua en $x=1$, entonces f es continua en todo su dominio.

Indicación: Pruebe que $f(1)=0$.

En primer lugar se probará la indicación, $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)\Rightarrow f(1)=2f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$.

Además, por hipótesis, se sabe que f es continua en 1, es decir $\forall(x_n)\subseteq\mathbb{R}_+,\ x_n\to 1\Rightarrow f(x_n)\to f(1)=0$.

Para probar la continuidad en todo $\mathbb{R}_+$, se usará la definición: $\forall(x_n)\subseteq\mathbb{R}_+,\ x_n\to\overline{x}\Rightarrow f(x_n)\to f(\overline{x})$.

$x_n\to\overline{x}\Rightarrow\dfrac{x_n}{\overline{x}}\to 1\Rightarrow f\left(\dfrac{x_n}{\overline{x}}\right)\to f(1)=0$, porque f es continua en 1. Por otro lado, usando la propiedad:

$f\left(\dfrac{x_n}{\overline{x}}\right) = f(x_n) + f\left(\dfrac{1}{\overline{x}}\right) \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to -f\left(\dfrac{1}{\overline{x}}\right) \qquad (*)$

Bastaría probar que $f(\frac{1}{x}) = -f(x):$ Recordando que $f(1) = 0$ y además $f(1) = f(\frac{x}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$

Por lo cual, $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

Al volver a $(*)$, se tiene que $f(x_n) \to -f\left(\dfrac{1}{\overline{x}}\right) = f(\overline{x})$, con lo cual se concluye la continuidad de f.

(b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la condición de Lipschitz, es decir :

$\exists L > 0 : \left|g(x) - g(y)\right| \leq L\left|x - y\right|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe entonces, que g es continua.

En este punto se utilizará la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad, es decir se probará que:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big), \forall x \in A\left\{\left|x - \overline{x}\right| \leq \delta \Rightarrow \left|g(x) - g(\overline{x})\right| \leq \varepsilon\right\}.$$

Se debe encontrar $\delta > 0$, con $\left|x - \overline{x}\right| \leq \delta$, tal que $\left|g(x) - g(\overline{x})\right| \leq \varepsilon$. Si $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L} > 0$, se tendrá que:

$\left|g(x) - g(\overline{x})\right| \underbrace{\leq}_{\substack{\text{Condición}\\ \text{de}\\ \text{Lipschitz}}} L\left|x - \overline{x}\right| \leq L \cdot \delta = L \cdot \dfrac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. Con lo cual se probó la continuidad de f,

P4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua y sea la sucesión (a_n) en $[a, b]$ (no necesariamente convergente), tal que $f(a_n) \to \overline{y}$.

(a) Demuestre que existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y}$.

Por *Teorema de Bolzano-Weierstrass* como $a_n \in [a, b]$ (Acotada), existe una subsucesión convergente, es decir existe $a_{\varphi(n)} \to \ell \in [a, b]$. Por hipótesis la sucesión $u_n = f(a_n) \to \overline{y}$, entonces $u_{\varphi(n)} = f(a_{\varphi(n)}) \to \overline{y}$ al ser una subsucesión de (u_n). Por otro lado la continuidad de f asegura que $u_{\varphi(n)} = f(a_{\varphi(n)}) \to f(\ell)$. Por unicidad del límite, necesariamente debe tenerse que $f(\ell) = \overline{y}$. Con lo cual se ha probado que existe algún real en $[a, b]$, tal que $f\big(\overline{x} = \ell\big) = \overline{y}$.

(b) Si además se tiene que $\forall\, x \in [a, b] \setminus \{\overline{x}\} : f(x) \neq \overline{y},$ concluya que (a_n) converge a $\overline{x}$.

Si consideramos una subsucesión de (a_n) tal que converja a otro número, digamos $\lambda,$ entonces por la parte anterior se tendría que $f(\lambda) = \overline{y},$ lo cual no puede ocurrir, pues $\forall\, x \in [a, b] \setminus \{\overline{x}\} : f(x) \neq \overline{y}$ y partimos suponiendo que $\overline{x} \neq \lambda$. Así todas las subuseciones de (a_n) convergen a $\overline{x} \Rightarrow a_n \to \overline{x}$.

P5. Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, una función continua en todo $\mathbb{R}$, tal que para $x<a$, $f(x)<0$ y para $x>a$, $f(x)>0$. Pruebe que la función f se anula en $x=a$.

Como f es una función continua $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a) \quad (*)$

$f(x)<0$ para $x<a \Rightarrow f(a) \overbrace{=}^{(*)} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leq 0$

$f(x)>0$ para $x>a \Rightarrow f(a) \overbrace{=}^{(*)} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \geq 0$

Así, al juntar las dos líneas anteriores: $0\leq f(a)\leq 0 \Rightarrow f(a)=0$.

Nota : También se puede hacer con la definición $\varepsilon-\delta$, suponiedo, por contradicción que $f(a)>0$ (el caso $f(a)<0$ es análogo) y tomando, por ejemplo, $\varepsilon=\frac{f(a)}{2}$.

P6. (a) Sean $f,g:[a,b]\to[a,b]$ funciones continuas y sobreyectivas. Pruebe que $\exists\overline{x}\in[a,b]: f(\overline{x})=g(\overline{x})$.

Además, pruebe la existencia de puntos fijos para f, esto es, pruebe que $\exists\overline{x}\in[a,b]: f(\overline{x})=\overline{x}$.

Definiendo la función $h(x)=f(x)-g(x)$, que es una función continua por ser la resta de dos funciones continuas, se desea utilizar el *TVI* o particularmente el teorema de *Bolzano*.

Como f es continua en un cerrado y acotado existen x_1 y x_2 en $[a,b]$ tales que $f(x_1)=a$ y $f(x_2)=b$.

Lo anterior es asegurado por los teoremas de máximo y mínimo y por el hecho de f es sobreyectiva.

$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=a-g(x_1)\leq 0$.

$h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=b-g(x_1)\geq 0$.

Lo anterior es cierto pues el recorrido de f y g es el intervalo $[a,b]$. Así $h(x_1)\cdot h(x_2)\leq 0$

Por el teorema del valor intermedio (o Bolzano) $\exists\overline{x}\in[a,b]: h(\overline{x})=0 \Leftrightarrow f(\overline{x})-g(\overline{x})=0 \Leftrightarrow f(\overline{x})=g(\overline{x})$.

Para el estudio de puntos fijos para f, basta considerar $g(x)=x$, con lo cual $\exists\overline{x}\in[a,b]: f(\overline{x})=g(\overline{x})=\overline{x}$.

Nota: También puede definirse la función auxiliar $u(x)=f(x)-x$ y usar el TVI (o bolzano).

(b) Un monje vive en un monasterio a los pies de una montaña. El día 7 de cada mes a las 00:00 hrs., el monje comienza una caminata de 24 horas hasta la cumbre de la montaña. Una vez ahí, medita durante 6 horas y luego baja la montaña de vuelta al monasterio. La bajada le toma 1 hora. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 7 y otro en el día 8, en los que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio a la misma hora del día.

Esta pregunta se encuentra resuelta en varios lados, porque es una pregunta del apunte, por lo cual no escribiré la pauta. Además es una resolución muy típica definiendo la función auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$ donde f representa la posición del monje (respecto al monasterio) en la subida y g representa la posición en la bajada.