MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Auxiliar 4: Derivadas (II).

Convexidad: Se dice que una función es convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ ssi f' es creciente en (a,b).

Desarrollos de Taylor : Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x}\in(a,b)$ y sea:

$$T_f^k(h)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})\cdot h+\tfrac{1}{2}f''(\overline{x})\cdot h^2+\ldots+\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\overline{x})\cdot h^k,$$

su desarrollo limitado de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces:

$$f(x)=T_f^k(x-\overline{x})+o\Big((x-\overline{x})^k\Big).$$

con $\lim\limits_{h\to0}\frac{o(h^k)}{h^k}=0$.

Caracterización de puntos críticos: Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x}\in(a,b)$, con $f'(\overline{x})=f''(\overline{x})=\ldots$ $\ldots=f^{(k-1)}(\overline{x})=0$ y $f^{(k)}(\overline{x})\neq0$ $(k\geq2)$. Entonces, hay 3 casos posibles:

(1) Si k es impar, entonces $\overline{x}$ es punto de inflexión.

(2) Si k es par y $f^{(k)}(\overline{x})>0$, entonces $\overline{x}$ es un mínimo local.

(3) Si k es par y $f^{(k)}(\overline{x})<0$, entonces $\overline{x}$ es un máximo local.

Fórmula de Taylor: Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en (a,b) y sea $T_f^k(\cdot)$ su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}\in(a,b)$. Entonces para todo $x>\overline{x}$ (resp $x<\overline{x}$), existe $\xi\in(\overline{x},x)$ (resp $\xi\in(x,\overline{x})$), tal que:

$$f(x)=T_f^k(x-\overline{x})+\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\cdot(x-\overline{x})^{k+1}.$$

Problemas:

P1. Usando el Teorema del Valor Medio pruebe que:

$$x^\alpha\leq\alpha x+(1-\alpha),\ \text{con } x\geq0 \text{ y } \alpha\in(0,1).$$

Ind: Considere la función $f(x)=\alpha x-x^\alpha$.

Deduzca que si a y b son números positivos, entonces: $a^\alpha b^{1-\alpha}\leq\alpha a+(1-\alpha)\cdot b$.

P2. (a) Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en (a,b), tales que $f'(x) = g'(x) \;\; \forall x \in (a,b),$ pruebe que:

$$f(x) = g(x) + k \;\; \forall x \in (a,b) \text{ y } k \in \mathbb{R}.$$

(b) Sea $y(x) = \arctan\left(\dfrac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\dfrac{2a-x}{x\sqrt{3}}\right)$, donde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Calcule $y'(x)$ y escríbalo en su forma más sencilla, para deducir que $y(x)$ puede escribirse de una forma más simple.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$ definida por la ley: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\ln(x)}} & \text{si } x > 0. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(a) Determine Dom(f), el conjunto de puntos donde f es continua y posibles discontinuidades reparables.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x > 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$. Analice crecimiento y existencia de máximos y mínimos locales y/o globales.

(c) Pruebe que existe un único $\overline{x} \in \left[\sqrt{e}, e^2\right]$ tal que $f(\overline{x}) = \pi$. (Ind: Recuerde que $2 < e < 3$ y $3 < \pi < 4$).

(d) Calcule f'', determine convexidades y puntos de inflexión, si los hay.

(e) Analice la existencia de asíntotas de todo tipo.

(f) Bosqueje el gráfico de f, e indique el recorrido de la función.

P4. (a) Se define la función $h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{\operatorname{senh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Sabiendo que h es derivable en 0 y g es dos veces derivable en el intervalo $(-\delta, \delta)$, con $\delta > 0,$ se pide calcular los valores de $g(0),\; a$ y $h'(0)$.

(b) Suponga ahora que $h''(0)$ existe y se tiene que $h''(0) = \beta$ (no calcule h'').

Escriba el desarrollo de Taylor de orden 2 de h en torno a $x_0 = 0$.

P5. Encuentre un desarrollo limitado para $\varphi(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en torno a $\overline{x} = 0$, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sea inferior a 10^{-3}.