MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Auxiliar 5: Preparación Control 1.

P1. Sean $0 < a < b$ y las funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b).

(a) Pruebe que $\exists \overline{x} \in [a,b] : \ f(\overline{x}) = \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$.

(b) Pruebe que si $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$, entonces $\exists \overline{x} \in (a,b) : \ \overline{x} \cdot f'(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

(c) Pruebe que si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces $\exists \overline{x} \in (a,b) : \ f'(\overline{x}) = g'(\overline{x})$.

(d) Pruebe que si $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$, Entonces entre dos raices consecutivas de f, existe una y sólo una raíz de g.

P2. Encuentre la ecuación de la recta $L \subseteq \mathbb{R}^2$ que pasa por el punto $P(3,5)$ y tal que el triángulo del primer cuadrante determinado por L y los ejes coordenados tenga área mínima.
Justifique el mínimo y calcule el área mínima.

P3. Analice la continuidad y diferenciabilidad en $\overline{x} = 0$ de la función $f(x) = e^{-|x|}$.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(\mathbb{R})$. Se tiene que $|f(0)| \leq M$, $|f(2)| \leq M$ y $|f''(x)| \leq K \ \forall x \in [0,2]$.
Donde $M, K \in \mathbb{R}^+$ fijos. Pruebe que $|f'(0)| \leq M + K$. (Hint: Use un desarrollo de Taylor para f)

P5. Sabiendo que $f''(\overline{x})$ existe, pruebe que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x} - h)}{h^2} = f''(\overline{x})$$

P6. Considere la función $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, tal que $f_n(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} \quad \forall n \geq 2$.

(a) Pruebe que la función es estrictamente creciente y estrictamente convexa $\forall n \geq 2$.

(b) Pruebe que la ecuación $f_n'(x) = 2$ tiene solución única $\overline{x} \in [0,1]$.

Propuesto 1:

Pruebe que si $f(x)$ es 2 veces derivable en $\mathbb{R}$ y tiene tres raices, entonces $f''(x)$ tiene al menos una.

(Hint: Utilice adecuadamente el TVM)

Propuesto 2:

Se construye un cilindo de altura h y base circular de radio R de modo que $R = f(h)$. Determine las dimensiones del cilindro que maximizan su volumen, para los casos $f(x) = e^{-x}$ y $f(x) = e^{-x^2}$.

Propuesto 3:

Pruebe que $\operatorname{sen}(x) \leq \pi x - x^2, \ \forall x \in \left[0, \pi\right]$.

(Hint: Pruebe que la función $f(x) = \pi x - x^2 - \operatorname{sen}(x),$ es cóncava en $\left[0, \pi\right]$ y concluya).

Propuesto 4:

Sean $0 < a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R},$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $f(a) = f(b) = 0$.

Pruebe que existe $c \in (a,b)$, tal que la tangente a f en el punto c pasa por el origen.

(Hint: Haga un dibujo de f y de la tangente a f en c, para definir una función auxiliar adecuada).

Propuesto 5:

Sean $p(x),\ q(x)$ y $g(x),$ funciones continuas en $[0,1]$. Considere que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ con $f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta.\ (\alpha, \beta \geq 0)$. La función f también satisface la ecuación diferencial:

$$f'' + p(x)f' + q(x)f = g(x) \quad \forall x \in (0,1).$$

Suponga que $q(x) < 0 \quad \forall x \in [0,1]:$

(a) Para probar que si $g(x) \leq 0$ en $[0,1],$ entonces $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1],$ proceda como sigue:

(i) Justifique por qué $f(x)$ alcanza su mínimo global en $\overline{x} \in [0,1]$.

(ii) Suponga que $\overline{x} \in (0,1)$. Pruebe que $f''(\overline{x}) \geq 0$.

(Hint: Utilice un desarrollo limitado de orden 2 de f en torno a $\overline{x}$)

(iii) Verifique qué condiciones cumplen las derivadas de f en $\overline{x}$ y concluya.

(b) Pruebe que si $\alpha = \beta = 0$ y $g \equiv 0,$ entonces $f \equiv 0$. (Hint: Considere la función $h(x) = -f(x)$)