

## Auxiliar Extra 2

Auxiliar: Álvaro Bustos

**P1** (Primavera 2008) Sea  $V = M_2(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de las matrices de  $2 \times 2$  con coeficientes reales, y las operaciones usuales de suma y producto de matriz por escalar. Se definen

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + d = 0 \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -x & y \\ x & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

**P1.a)** Demuestre que  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios vectoriales de  $V$ .

**P1.b)** Encuentre bases para  $W_1$  y  $W_2$  indicando las respectivas dimensiones de cada subespacio.

**P1.c)** Encuentre una base y la dimensión de  $W_1 \cap W_2$ .

**P1.d)** Complete una base de  $W_1$  para obtener una base de  $V$ . Justifique.

**P2** Sea  $[a, b]$  un intervalo contenido en el intervalo  $[0, n]$  con  $a, b, n \in \mathbb{N}$  y  $\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$  la función indicatriz de  $[a, b]$ :

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Sea  $\mathcal{F}([0, n], \mathbb{R})$  el e.v. de las funciones del intervalo  $[0, n]$  en  $\mathbb{R}$ . Definimos el conjunto  $F \subseteq \mathcal{F}([0, n], \mathbb{R})$  de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir:

$$f \in F \iff (\forall 1 \leq i \leq n)(\exists \lambda_i \in \mathbb{R}) : (\forall x \in [0, n]) f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1, i)}(x)$$

**P2.a)** Sea  $[a, b]$  un intervalo con  $a, b \in \mathbb{N}$  y  $a < b < n$ . Pruebe que  $\mathbb{1}_{[a, b]} \in F$ .

**P2.b)** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  una constante y  $f \in F$ . Pruebe que  $g = \alpha f \in F$ .

**P2.c)** Pruebe que  $F$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{F}([0, n], \mathbb{R})$ .

**P2.d)** Pruebe que el conjunto de funciones  $B := \{\mathbb{1}_{[0,1)}, \mathbb{1}_{[1,2)}, \dots, \mathbb{1}_{[n-1,n)}\}$  es un conjunto linealmente independiente.

**P2.e)** Encuentre una base de  $F$ .

**P2.f)** Encuentre un isomorfismo (transformación lineal biyectiva)  $T : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  y calcule  $T(\mathbb{1}_{[a,b]})$ .

**P3** (Primavera 2011) Para esta pregunta, considere un plano  $\Pi$  en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

**P3.a)** Considere un punto  $P \notin \Pi$ , y sea  $S(P)$  su punto simétrico en el plano  $\Pi$  (es decir, el segmento que une  $P$  con  $S(P)$  es normal a  $\Pi$  y además  $d(P, \Pi) = d(S(P), \Pi)$ ). Demuestre que para cualquier punto  $Q \in \Pi$  se tiene que  $d(P, Q) = d(S(P), Q)$ .

**P3.b)** Considere el plano  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  y  $A, B \in \mathbb{R}^3$  dos puntos ubicados al mismo lado del plano  $\Pi$ . Muestre que el punto  $R \in \Pi$  tal que  $d(A, R) + d(B, R)$  es mínima se obtiene como la intersección del plano  $\Pi$  con la recta que une los puntos  $S(A)$  con  $B$ .

**P3.c)** Si  $A = [1, 1, 2]$ ,  $B = [2, 1, 0]$  y  $\Pi : x + y + z = 1$ , encuentre el punto  $R$  de la parte anterior y la distancia mínima  $d(A, R) + d(B, R)$ .

**P4** Considere para esta pregunta el espacio vectorial  $\mathbb{R}[x]$  de los polinomios con coeficientes reales.

**P4.a)** Sea  $p(x)$  un polinomio de grado 1 o mayor. Demuestre que, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , los polinomios  $\{1, p(x), p(x)^2, \dots, p(x)^n\}$  forman un conjunto l.i.; concluya que para cualquier  $a \in \mathbb{R}$  los polinomios  $\{1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\}$  forman una base de  $P_n(\mathbb{R})$ .

**P4.b)** ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}[x]$  son subespacios vectoriales?

1.  $M = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x)^2 = (p(x))^2\}$
2.  $S(\lambda) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(\lambda) = 0\}$
3.  $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 1\}$
4.  $E(\lambda, \mu) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(\lambda) = p(\mu)\}$

**P4.c)** Sea  $V$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}[x]$ . Pruebe que este espacio es de dimensión finita si y solo si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $(\forall p(x) \in U) \deg(p(x)) \leq n$ .

**P5** Para este ejercicio, considere subespacios de  $\mathbb{R}^n$ .

**P5.a)** Considere el conjunto:

$$B = \{(1, 1, 1, 2, 3), (1, 2, -1, -2, 1), (3, 5, -1, -2, 5), (1, 2, 1, -1, 4)\}$$

Encuentre un subconjunto l.i.  $C$  de  $B$  (una base) tal que  $\langle B \rangle = \langle C \rangle$ .

**P5.b)** Halle una base y la dimensión del espacio solución  $W$  del siguiente sistema homogéneo:

$$x + 2y - 2z + 2s - t = 0$$

$$x + 2y - z + 3s - 2t = 0$$

$$2x + 4y - 7z + s + t = 0$$