MA1102 Álgebra Lineal, Semestre Primavera 2012 Profesor: Alejandro Maass **Auxiliares:** César Vigouroux - Roberto Villaflor

Auxiliar #7

Martes 01 de Octubre

P1. a) Sea X un espacio vectorial y U s.e.v. de X. Pruebe que existe T s.e.v. de X tal que

$$T \oplus U = X.$$

b) Sea X un espacio vectorial y $U, V \subset X$ subespacios de X. Pruebe que

$$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V).$$

P2. Considere para $n \in \mathbb{N}$ el espacio vectorial $\mathbb{P}_n$ sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado n o menor. Sean

$$W_1 = \{p \in \mathbb{P}_4 | p(1) + 2p(-1) = 0\}$$

$$W_2 = \{p \in \mathbb{P}_4 | p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

a) Pruebe que W_1 y W_2 son s.e.v. de $\mathbb{P}_4$.

b) Encuentre bases de W_1 y W_2.

c) Encuentre una base para $W_1 \cap W_2$.

d) Calcule la dimensión de $W_1 + W_2$ y concluya que $W_1 + W_2 = \mathbb{P}_4$.

P3. a) Sean

$$W = \{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & e & c \\ 0 & c & i \end{pmatrix} \wedge a + e + i = 0, a, b, c, e, i \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | M = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ r & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix} \ r, s \in \mathbb{R}\}$$

(a.1) Pruebe que W y U son s.e.v. de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a.2) Encuentre bases para W, U, $W + U$ y $W \cap U$.

(a.3) Observe que W y U son s.e.v. de $S = \{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | M$ es simétrica$\}$ y complete la base obtenida para $W + U$ de manera de obtener una base para S.

b) Considere

$$A = \langle\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

(b.1) Encuentre una base de A.

(b.2) Extienda la base encontrada a una base de $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{P4.}}$ Sea X un e.v. sobre $\mathbb{K}$. Se define el dual de X por

$$X' = \{f : F \to \mathbb{K} | \forall x, y \in X, \forall k \in \mathbb{K} : f(x+y) = f(x) + f(y) \wedge f(kx) = kf(x)\}$$

a) Pruebe que X' sobre $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial.

b) Pruebe que si $dim(X) = n$, entonces $dim(X') = n$. (Indicación: Considere una base $\{e_1, ..., e_n\}$ de X y pruebe que $l_i(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_i$ para $i = 1, ..., n$, es base de X'.)

c) Pruebe la fórmula de la cuadratura:
Si t_1,...,$t_{n+1} \in [-1, 1]$ son valores distintos, entonces existen $m_1, ..., m_{n+1} \in \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in \mathbb{P}_n$

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = m_1p(t_1) + ... + m_{n+1}p(t_{n+1}).$$