MA1102 Álgebra Lineal - Semestre Primavera 2012
Profesor: Alejandro Maass **Auxiliares:** César Vigouroux, Roberto Villaflor

Auxiliar # 12

Jueves 15 de Noviembre

P1. (a) Sea $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica tal que $Q^k = I$, con $k \in \mathbb{Z}^+$. Pruebe que $Q^2 = I$.

(b) Sea $H, K \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ autoadjuntas tal que $HK = KH$. Pruebe que existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ conformada por vectores propios de H y K (cada vector es vector propio de H y de K).

P2. (a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, decimos que A es anti-autoadjunta si $A^* = -A$. Pruebe que si A es anti-autoadjunta, todos los valores propios de A son imaginarios y existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ conformada por valores propios de A.

(b) Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ anti-simétrica, es decir, $M^t = -M$, y n impar. Pruebe que $det(M) = 0$.

(c) Sea $N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, decimos que N es normal si $NN^* = N^*N$. Pruebe que si N es normal, existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ de vectores propios de N.

P3. (a) Decimos que un conunto de matrices $(M_i)_{i=1}^k \subset \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es una resolución de la identidad si $M_i^* = M_i = M_i^2 \ \forall i \in \{1, ..., k\}$; $M_iM_j = 0 \ \forall i, j \in \{1, ..., k\} : i \neq j$; y $\displaystyle\sum_{i=1}^k M_i = I$. Dada $N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, decimos que N posee una resolución espectral si existe una resolución de la identidad $(M_i)_{i=1}^k \subset \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $N = \displaystyle\sum_{i=1}^k a_iM_i$ para $(a_i)_{i=1}^k \subset \mathbb{C}$. Pruebe que si N es normal, entonces posee una resolución espectral.

(b) Sea $N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ normal, pruebe que $N^* = p(N)$ para algún polinomio complejo p.