Pauta Auxiliar 12: Álgebra Lineal

S_{P_1}

(a) Como $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es simétrica, $Q = PDP^t$, con $P^{-1} = P^t$, y D diagonal $\Rightarrow Q^k = (PDP^t)^k = PD^kP^t$, donde $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ y $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}$

así, si $Q^k = I \Rightarrow PD^kP^t = I \Rightarrow P^t(PD^kP^t)P = P^tIP$

$$\Rightarrow D^k = I \Rightarrow \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_i^k = 1 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

dependiendo de la paridad de k, $d_i = 1 \vee d_i \in \{1, -1\}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$; en cualquier caso $d_i^2 = 1$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^2 = I \Rightarrow PD^2P^t = I \Rightarrow (PDP^t)^2 = I$$

$$\Rightarrow Q^2 = I.$$

(b) Al igual que en el caso real, el Teorema Espectral se aplica a transformaciones autoadjuntas en los complejos; así si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son los valores propios de H y $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(H - \lambda_i I)$, $i \in \{1, \dots, k\}$: $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k} = \mathbb{C}^n$, es decir, H descompone a $\mathbb{C}^n$ en los espacios propios. Veamos que K descompone a cada E_{λ_i}, $i \in \{1, \dots, k\}$: K es autoadjunta en E_{λ_i} ssi $\langle Ku, v\rangle_H = \langle u, Kv\rangle_H$ $\forall u, v \in E_{\lambda_i}$; pero como K es autoadjunta en $\mathbb{C}^n$, $\langle Ku, v\rangle_H = \langle u, Kv\rangle_H$ $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$, y en particular $\forall u, v \in E_{\lambda_i}$. Ahora veamos que $K(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$:

Sea $u \in E_{\lambda_i} \Rightarrow (H - \lambda_i I)u = 0 \Rightarrow Hu = \lambda_i u \Rightarrow K(Hu) = K(\lambda_i u)$

$$\Rightarrow KHu = \lambda_i Ku \Rightarrow HKu = \lambda_i Ku \Rightarrow H(Ku) = \lambda_i(Ku)$$

$$\Rightarrow Ku \in E_{\lambda_i}.$$

Así $K: E_{\lambda_i} \to E_{\lambda_i}$ es autoadjunta y por el teorema espectral, cada E_{λ_i} posee una base β_i ortonormal, de vectores propios de K, $\bigcup_{i=1}^{k} \beta_i = \beta$ es base ortonormal de $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k} = \mathbb{C}^n$ de vectores propios de K y H (pues $\beta_i \subseteq E_{\lambda_i}$ espacio propio de H). $\square$

$\boxed{SP_2}$ (a) Veamos que iA es autoadjunta: $(iA)^* = \overline{(iA)}^t = (-i\bar{A})^t = -i\bar{A}^t = -iA^* = -i(-A) = iA$.

Luego por el Teorema Espectral, todos los valores propios de iA son reales y existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ conformada por vectores propios de iA. Pero si

$$iAv = \lambda v \Rightarrow Av = -i\lambda v,$$

luego los valores propios de A son $-i$ por los valores propios de iA (que son reales), es decir, son imaginarios y los vectores propios de A son los mismos que los de iA.

(b) Si $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $M^* = M^t = -M \Rightarrow M$ es antiautoadjunta $\Rightarrow$ todos los valores propios de M son imaginarios. Supongamos que $0 \notin \sigma(M) :=$ conjunto de valores propios de M, como para cada $i\alpha \in \sigma(M)$, $-i\alpha \in \sigma(M)$ ya que si $Mv = i\alpha v \Rightarrow \overline{(Mv)} = \overline{(i\alpha v)} \Rightarrow \bar{M}\bar{v} = -i\alpha\bar{v} \Rightarrow M\bar{v} = -i\alpha\bar{v}$; más aún

$$E_{i\alpha} = \overline{E_{-i\alpha}} \Rightarrow \dim E_{i\alpha} = \dim \overline{E_{-i\alpha}} = \dim E_{-i\alpha}.$$

Si $0 \notin \sigma(M) \Rightarrow$ cada valor propio $i\alpha \in \sigma(M)$ le corresponde una pareja $-i\alpha \in \sigma(M)$, osea, $|\sigma(M)| = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$

$$\text{y } \dim \mathbb{C}^n = \sum_{\lambda\in\sigma(M)} \dim E_\lambda = \sum_{\substack{i\alpha\in\sigma(M)\\ \text{un } i\alpha \text{ por}\\ \text{cada pareja}}} \dim E_{i\alpha} + \dim E_{-i\alpha} = \sum 2\dim E_{i\alpha} = 2p$$

con $p \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2p$ $\times$ pues n es impar. Luego $0 \in \sigma(M)$

$$\Rightarrow \det M = \prod_{\lambda\in\sigma(M)} \lambda = 0.$$

(c) Definamos $A = \dfrac{N+N^*}{2}$, $H = \dfrac{N-N^*}{2} \Rightarrow A^* = \left(\dfrac{N+N^*}{2}\right)^* = \dfrac{N^*+N}{2} = A$

y $H^* = \left(\dfrac{N-N^*}{2}\right)^* = \dfrac{N^*-N}{2} = -\left(\dfrac{N-N^*}{2}\right) = -H$; así A es autoadjunta, H anti-autoadjunta, luego A y iH son autoadjuntas y

$$A(iH) = \left(\frac{N+N^*}{2}\right)\left(\frac{iN-iN^*}{2}\right) = \frac{i}{4}\left(N^2 - NN^* + N^*N - N^{*2}\right) = \frac{i}{4}\left(N^2 - N^{*2}\right)$$

$$(iH)A = \left(\frac{iN-iN^*}{2}\right)\left(\frac{N+N^*}{2}\right) = \frac{i}{4}\left(N^2 + NN^* - N^*N - N^{*2}\right) = \frac{i}{4}\left(N^2 - N^{*2}\right)$$

es decir, $A(iH) = (iH)A$.

Por lo demostrado en P1.(b), existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ de vectores propios de A y iH; y por lo hecho en P2.(a) los vectores propios de iH coinciden con los de H, luego existe una base ortonormal $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, de vectores propios de A y H;

pero

$$N = A + H \text{, luego si } Av_k = \lambda_k v_k \text{ y } Hv_k = \mu_k v_k$$

$$\Rightarrow N v_k = Av_k + Hv_k = (\lambda_k + \mu_k) v_k$$

$$\Rightarrow v_k \text{ es vector propio de } N \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

es decir, β es una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ de vectores propios de N. $\square$

S_{P_3}

(a) Por lo hecho en P2.(c) si N es normal, existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ de vectores propios de N. Sabemos que esto significa que si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es dicha base ortonormal y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los vectores propios correspondientes, podemos diagonalizar N, i.e.:

$$N = U D U^{-1}$$

donde $U = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Más aún, como β es ortonormal

$$U^* U = \begin{pmatrix} \overline{v_1}^t \\ \vdots \\ \overline{v_n}^t \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \overline{v_1}^t v_1 & \cdots & \overline{v_1}^t v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{v_n}^t v_1 & \cdots & \overline{v_n}^t v_n \end{pmatrix},$$

es decir $(U^*U)_{i,j} = \overline{v_i}^t v_j = \overline{(v_i)_1}(v_j)_1 + \overline{(v_i)_2}(v_j)_2 + \dots + \overline{(v_i)_n}(v_j)_n$

$$= \langle v_j, v_i \rangle_H$$

como β es ortonormal $\langle v_j, v_i \rangle_H = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$

$$\Rightarrow U^* U = I$$

$$\Rightarrow U^{-1} = U^*.$$

Es decir $N = UDU^*$, $U^{-1} = U^*$ y D diagonal.

$$\Rightarrow U^* N U = D = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \,,$$

donde $P_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ fila k, es decir $(P_k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$,

es claro que $P_k^2 = P_k = P_k^*$ y que $P_i P_j = 0$ para $i \neq j$ y que $\sum_{i=1}^n P_i = I$.

$$\Rightarrow U^* N U = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

$$\Rightarrow N = \sum_{i=1}^n \lambda_i U P_i U^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \quad , \text{ con } M_i = U P_i U^*, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

veamos que $(M_i)_{i=1}^n$ es una resolución de la identidad:

$$M_k^2 = (U P_k U^*)^2 = U P_k U^* U P_k U^* = U P_k^2 U^* = U P_k U^* = M_k$$

$$M_k^* = (U P_k U^*)^* = (U^*)^* P_k^* U^* = U P_k U^* = M_k$$

y $M_i M_j = (U P_i U^*)(U P_j U^*) = U P_i P_j U^* = U 0 U^* = 0$, para $i \neq j$.

Así $N = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i$ es una resolución espectral.

(b) Por P3.(a) N posee resolución espectral $N = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i$

$$\Rightarrow N^* = \overline{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i\right)}^t = \left(\sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i}\, \overline{M_i}\right)^t$$

$$= \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i}\, \overline{M_i}^t = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} M_i^*$$

$$= \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} M_i .$$

Ahora, notemos que $N^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i\right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda_j M_i M_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 M_i^2$ (pues $M_i M_j = 0$, $i \neq j$)

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 M_i \qquad (\text{pues } M_i^2 = M_i)$$

también $N^3 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 M_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j M_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^2 \lambda_j M_i M_j$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 M_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 M_i$$

inductivamente $N^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k M_i$

y para $p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$

$$p(N) := a_0 N^m + a_1 N^{m-1} + \dots + a_m I$$
$$= a_0\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m M_i\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{m-1} M_i\right) + \dots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 \lambda_i^m + a_1 \lambda_i^{m-1} + \dots + a_m\right) M_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i) M_i .$$

Así, si determinamos un polinomio p tal que $p(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow p(N) = \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i) M_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} M_i = N^*.$$

Lo único que nos falta es mostrar que dicho polinomio debe existir; queremos p tal que $\forall \lambda \in \sigma(N)$

$$p(\lambda) = \overline{\lambda}.$$

Sea $\sigma(N) = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ con $|\sigma(N)| = k$ y $\mu_1, \dots, \mu_k$ distintos, queremos que $p(\mu_i) = \overline{\mu_i}$. Sea

$$T : \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^k \quad \text{dado por}$$
$$T(p) = (p(\mu_1), \dots, p(\mu_k))$$

T es una transformación lineal de $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}) = \{$polinomios complejos de grado menor que $k\}$ en $\mathbb{C}^k$, y $\dim \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) = \dim \mathbb{C}^k = k$. Veamos que T es inyectiva (i.e. $\ker T = \{0\}$):

si $T(p) = (0, \dots, 0) \Rightarrow p(\mu_1) = p(\mu_2) = \dots = p(\mu_k) = 0$

$\Rightarrow p$ tiene k raíces distintas y $\operatorname{grad} p < k$

$\Rightarrow p \equiv 0$. (pues si $p \neq 0$, p posee a lo más $k-1$ raíces distintas)

$\Rightarrow \ker T = \{0\}$

Por el Teorema Núcleo Imagen $\dim \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$

$\Rightarrow k = 0 + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = k$, y $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{C}^k$

$\Rightarrow \operatorname{Im} T = \mathbb{C}^k$, i.e. T es sobreyectiva, luego como $(\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}, \dots, \overline{\mu_k}) \in \mathbb{C}^k \Rightarrow \exists p \in \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) : T(p) = (\overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_k})$ i.e. $(p(\mu_1), \dots, p(\mu_k)) = (\overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_k})$. $\square$