Pauta Auxiliar 13: Álgebra Lineal

SP1

i) $F(x)-F(x_0) = x^tAx + 2b^tx + \alpha - x_0^tAx_0 - 2b^tx_0 - \alpha$

$= x^tAx + 2(-Ax_0)^tx - (A^tx_0)^tx_0 - 2(-Ax_0)^tx_0$

$= x^tAx - 2x_0^tAx - x_0^tAx_0 + 2x_0^tAx_0$

$= x^tAx - x_0^tAx - x_0^tAx + x_0^tAx_0$

como $x_0^tAx \in \mathbb{R} \Rightarrow x_0^tAx = (x_0^tAx)^t = x^tA^tx_0 = x^tAx_0$ pues A es simétrica

$$\Rightarrow F(x)-F(x_0) = x^tAx - x_0^tAx - x^tAx_0 + x_0^tAx_0$$
$$= (x-x_0)^tA(x-x_0).$$

Ahora veamos que x_0 es el lugar donde se alcanza el mínimo de F:

Sea $\bar{x} \neq x_0 \Rightarrow \bar{x}-x_0 \neq 0 \Rightarrow (\bar{x}-x_0)^tA(\bar{x}-x_0) > 0$ pues A es definida positiva

$$\Rightarrow F(\bar{x})-F(x_0) > 0$$
$$\Rightarrow F(x_0) < F(\bar{x}).$$

ii) $$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2(-4\ -1\ 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (-3).$$

$$= x^tAx + 2b^tx + \alpha \quad \text{, donde } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\alpha = -3.$$

Luego el mínimo se alcanza en x_0 tal que $Ax_0 + b = 0 \Leftrightarrow x_0 = -A^{-1}b$,

resolvamos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 9 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 9 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -24 & 12 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1$
$-24x_2 + 12x_3 = -1$
$12x_2 = 1$

$x_2 = \frac{1}{12}$
$-2 + 12x_3 = -1$
$x_1 + \frac{5}{12} - 3x_3 = 1$

$x_2 = \frac{1}{12}$
$x_3 = \frac{1}{12}$
$x_1 = \frac{5}{6}$

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Así $\boxed{\min_{\mathbb{R}^3} F = F(x_0) = \frac{-25}{4}}$. □

$\boxed{SP_2}$

(a) i) Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $x^t A^t A x = (Ax)^t Ax = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2$

luego $x^t A^t A x \geq 0$ y $x^t A^t A x = 0$ ssi $\|Ax\|^2 = 0$ ssi $Ax = 0$;

como A es invertible $\ker A = \{0\}$ (pues A es inyectiva), luego $Ax = 0$ ssi $x = 0$,

es decir, $x^t A^t A x > 0 \ \forall x \neq 0$. Lo que prueba que A es definida positiva.

Como $A^t A$ es simétrica, pues $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$, $A^t A$ es diagonalizable,

es decir existen Q y D tal que Q es invertible y D diagonal, y:

$$A^t A = Q D Q^{-1},$$

más aún como es simétrica y definida positiva $Q^{-1} = Q^t$ y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

con $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ los valores propios de $A^t A$, y $\lambda_i > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Definimos $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ (existe pues $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$)

y sea

$$P = Q \sqrt{D} Q^t$$

$\Rightarrow$ P es invertible pues Q y Q^t lo son (cada uno es inversa de la otra) y $\sqrt{D}$ también:

$$(\sqrt{D})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$ (existe pues $\sqrt{\lambda_i} \neq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$)

y además:

$$P^2 = Q\sqrt{D} Q^t Q \sqrt{D} Q^t = Q (\sqrt{D})^2 Q^t = Q D Q^t = A^t A.$$

ii) Como P es invertible, definimos $U = A P^{-1}$, luego

$$U U^t = (AP^{-1})(AP^{-1})^t = (A Q (\sqrt{D})^{-1} Q^t)(A Q (\sqrt{D})^{-1} Q^t)^t$$
$$= A Q (\sqrt{D})^{-1} Q^t Q (\sqrt{D})^{-1} Q^t A^t$$
$$= A Q (\sqrt{D})^{-1} (\sqrt{D})^{-1} Q^t A^t$$
$$= A Q D^{-1} Q^t A^t = A (Q D Q^t)^{-1} A^t = A (A^t A)^{-1} A^t = A A^{-1} (A^t)^{-1} A^t = I.$$

Es decir, U es ortogonal y $A = UP$. $\square$

(b) i) Supongamos que $A_{ii} \leq 0$ para algún $i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow e_i^t A e_i = e_i^t A_{\cdot i} = A_{ii} \leq 0$, con $e_i \neq 0$

$\Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $x^t A x \leq 0 \Leftrightarrow A$ no es semidefinida positiva.

ii) Notamos que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A$ pues si $z \in \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A$:

$$z = Aw \wedge Az = 0 \Leftrightarrow z = Aw \wedge A^2 w = 0 \Leftrightarrow z = Aw \wedge Aw = 0 \Rightarrow z = 0$$

Así $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$ y como $\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$ (Teorema Núcleo Imagen)

$$\operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A = \mathbb{R}^n.$$

Ahora si $v \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A tal que $Av = \lambda v$, $\exists! \, x \in \operatorname{Im} A$, $\exists! \, y \in \operatorname{Ker} A$ tq.

$v = x + y \Rightarrow Av = Ax + Ay \Rightarrow Av = Ax$ pues $y \in \operatorname{Ker} A$; y como $x \in \operatorname{Im} A$

$x = Au \Rightarrow Ax = A^2 u = Au = x \Rightarrow Av = x$; luego

$v = Av + y$, con $y \in \operatorname{Ker} A$.

Por ende, $Av = \lambda v \Rightarrow Av = \lambda(Av + y) \Rightarrow (1-\lambda) Av = \lambda y$, así $\lambda y \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \lambda y = 0 = (1-\lambda) Av$

como v es vector propio $v \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow Av \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow (1-\lambda) = 0 \vee \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1 \vee 0$.

iii) ($\Leftarrow$) Sea $x \in \operatorname{Im} A$, $y \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle Au, y \rangle$ pues $x = Au \in \operatorname{Im} A$.

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle u, Ay \rangle$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle u, 0 \rangle$ pues $y \in \operatorname{Ker} A$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

($\Rightarrow$) Probaremos que A posee una base ortonormal de vectores propios, con esto diagonalizamos A de la forma:

$$A = Q D Q^t, \text{ con } Q^{-1} = Q^t, D \text{ diagonal}$$

$$\Rightarrow A^t = (QDQ^t)^t = QD^tQ^t = QDQ^t = A, \text{ o sea, A es simétrica.}$$

Veamos que A efectivamente posee dicha base:

Sean $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \operatorname{Im} A$ base ortonormal y $\{u_1, \dots, u_{n-k}\} \subseteq \operatorname{Ker} A$ base ortonormal (de $\operatorname{Im} A$ y $\operatorname{Ker} A$ respectivamente) $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es base ortonormal (pues $\operatorname{Im} A \perp \operatorname{Ker} A$) y además son vectores propios ya que:

$$v_i = Aw_i \Rightarrow Av_i = A^2 w_i = Aw_i = v_i \Rightarrow (A - 1 \cdot I) v_i = 0 \Rightarrow v_i \in E_1$$

$$u_j \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow Au_j = 0 \Rightarrow u_j \in E_0. \; \square$$

$\boxed{SP_3}$

(a) (i) $\det A^{(1)} = \det(1) = 1 > 0$, $\det A^{(2)} = \det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$,

$$\det A^{(3)} = \det A = \det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Luego como $\det A^{(i)} \geq 0 \ \forall i \Rightarrow A$ es semidefinida positiva.

(ii) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2\sqrt{2} + x_2x_3\sqrt{2} - x_3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (0\ 0\ -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 1 = 0$$

diagonalizamos A: $$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1-\lambda & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\lambda)\right)$$
$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$
$$= \lambda(1-\lambda)(\lambda-2).$$

así los valores propios son $0, 1$ y 2. Encontremos una base de $\mathbb{R}^3$, de vectores propios ortonormales:

$\lambda = 0$: $Av = 0$ ssi $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = 0 \wedge \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 + v_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$: $Av = v$ ssi $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $v_2 = 0 \wedge v_1 + v_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$: $Av = 2v$ ssi $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = v_1 \wedge \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = v_3$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = PDP^t, \text{ con } P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación de la cónica es:

$$x^t P D P^t x + (0\,0\,-1) P P^t x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (P^t x)^t D (P^t x) + \frac{1}{2}(-1\ \sqrt{2}\ -1) P^t x + 1 = 0$$

hacemos el cambio de variables $y = P^t x$ y nos queda

$$y^t D y + \frac{1}{2}(-1\ \sqrt{2}\ -1) y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2^2 + 2y_3^2 + \frac{-y_1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 - \frac{y_3}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 2\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 4\left(y_3 - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{11}{16}$$

que corresponde a un paraboloide elíptico trasladado en $\left(\frac{11}{6}, \frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{8}\right)$ luego de haberlo rotado en P^t y haber cambiado las coordenadas. Luego, en estas nuevas coordenadas el eje de simetría posee dirección $(1,0,0)^t$; y como $y = P^t x \Rightarrow x = Py$, luego en las coordenadas antiguas el eje de simetría corresponde a $P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$.

(iii) $x^t A x = x^t P D P^t x = (P^t x)^t D (P^t x)$, como $P^t x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^t x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3\\ \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_3\\ x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^t A x = 0\cdot\left(\frac{1}{2}(x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3)\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_3)\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3)\right)^2$$

$$= \left(\frac{x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_3}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Y el mínimo se alcanza en los x tal que: $x_1 = x_3 = \frac{-x_2}{\sqrt{2}}$, es decir, en $\langle\{(1,-\sqrt{2},1)^t\}\rangle$. $\square$

(c) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 4x + 4y = 4 \Leftrightarrow (x,y)\begin{pmatrix}5 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (4\ 4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 4$, diagonalizamos $A = \begin{pmatrix}5 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix}5-\lambda & -3\\-3 & 5-\lambda\end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 - 3^2 = (2-\lambda)(8-\lambda) \Rightarrow$ los valores propios son 2 y 8. Encontremos un conjunto ortonormal de vectores propios:

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ ssi $v_1 = v_2 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 8$: $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ ssi $v_1 = -v_2 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Haciendo el cambio de variables $(a,b)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la ecuación queda:

$$(x,y)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (4\ 4)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4$$

$$\Leftrightarrow (a,b)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(8\ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 8b^2 + \frac{8a}{\sqrt{2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 2\sqrt{2}a = 2$$

$$\Leftrightarrow (a+\sqrt{2})^2 + 4b^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2 = 1.$$

que representa una elipse centrada en $(-\sqrt{2}, 0)$ con semiejes de largo 2 y 1 respectivamente (en el nuevo sistema de coordenadas). Para recuperar el antiguo sistema de coordenadas utilizamos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$, que corresponde a una rotación en $\frac{\pi}{4}$,

es decir, para el antiguo sistema coordenado tenemos la misma elipse, pero rotada en un ángulo de $-\frac{\pi}{4}$. $\square$