MA1101 Semestre Primavera 2012
Profesor de Cátedra: Mauricio Telias
Profesor Auxiliar: César Vigouroux

Auxiliar # 1

Jueves 2 de Agosto

$\boxed{\text{P1.}}$ Se dice que $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz de proyección si $P = P^2$.

(a) Pruebe que si P es matriz de proyección, entonces $I_n - P$ es matriz de proyección, donde I_n es la matriz identidad en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(b) Pruebe que P es matriz de proyección si y sólo si $P^2(I_n - P) = \mathbf{0}$ y $P(I_n - P)^2 = \mathbf{0}$.

$\boxed{\text{P2.}}$ Sean $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ diagonal ($d_1, \ldots, d_n$ reales distintos), $A,\ B,\ M$ y $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) Pruebe que si $MD = DM$, entonces M es diagonal.

(b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.

(c) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

$\boxed{\text{P3.}}$ a) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se define la *traza* de A, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Por otra parte se define la función $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, donde

$$f(A) = \mathrm{tr}(AA^t).$$

Pruebe que:

(i) Dadas $A,\ B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(ii) $f(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, además muestre que: $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(iii) $f(A) = \mathrm{tr}(A^tA)$.

b) Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $M^tM \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ como $P := I_m - M(M^tM)^{-1}M^t$, donde I_m es la matriz identidad de orden m.
Pruebe que:

(i) $P^2 = P$. Muestre además que $PM = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.

(ii) La matriz $M^t M$ es simétrica y muestre que la matriz P también es simétrica.

(iii) Pruebe que P **no** es invertible.

P4. a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que satisface la condición

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0$$

Pruebe que $A^{-1} = -A - 3I$

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $B^3 = 0$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definamos la matriz $M(\lambda) := I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$

Pruebe que:

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $M(\alpha + \beta) = M(\alpha) \cdot M(\beta)$

(ii) Pruebe que $M(\lambda)$ es invertible $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Para ello, piense en $M(0)$.