

MA1102 Álgebra Lineal, Semestre Primavera 2012

Prof. Cátedra: Mauricio Telias **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar # 4

Martes 21 de Agosto

P1. Sean L_1 y L_2 rectas en \mathbb{R}^3 , sea Π un plano. Encuentre la recta L_3 que pasa por Π y que interseca a L_1 y a L_2 , donde se tiene:

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi : x + y - z = 3$$

P2. Sea Π_1 el plano de ecuación $x + y + 2z = 1$, Π_2 el plano de ecuación $-x + y = 2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y cuya dirección es $D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- (i) Encuentre la ecuación de la recta L_2 , que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2 . Entregue un vector director de dicha recta.
- (ii) Encuentre el punto P_2 de la intersección de la recta L_1 y Π_1 .
- (iii) Calcule el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2 .
- (iv) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en Π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2 .

P3. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se dice que a es ortogonal a b si $\langle a, b \rangle = 0$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el *producto punto*, y es tal que $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Considere la norma euclídeana $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ y de por conocida la *desigualdad triangular*: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

- (a) Pruebe que si a es ortogonal a b , entonces $\|a + xb\| \geq \|a\| \forall x \in \mathbb{R}$.
- (b) Pruebe que si $\|a + xb\| \geq \|a\| \forall x \in \mathbb{R}$, entonces a es ortogonal a b .

P4. (a) Sean P y Q dos puntos en \mathbb{R}^3 . Demuestre que el conjunto $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - P\| = \|x - Q\|\}$ es un plano. Encuentre un punto que pertenezca a Π y un vector que sea normal a Π .

(b) Sean los vectores $a = (1, 1, \dots, 1)$ y $b = (1, 2, 3, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$ con ángulo θ_n entre ellos. Calcule el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de θ_n .