Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo en Varias Variables

Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Problemas resueltos y propuestos de cálculo en varias variables.

Integrales múltiples

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Primera Edición
11 de Mayo de 2011

Francisco Felipe Vilches Medina
frvilche@ing.uchile.cl

Prefacio

La presente colección de problemas resueltos y propuestos tiene como objetivo exponer problemas tipo de integración múltiple (materia desarrollada en el curso de Cálculo 3 en la mayor parte de las universidades del mundo), como también mostrar técnicas de resolución que faciliten la comprensión y el cálculo del tema a desarrollar, el actual documento está destinado tanto para estudiantes como para personas que deseen interiorizarse en el tema, no obstante puede tener mayor utilidad a alumnos del curso de Cálculo en varias variables, asignatura del tercer semestre de plan común de la carrera de ingeniería civil de la Universidad de Chile, debido a que los problemas poseen un nivel de dificultad acorde a lo que se espera de un alumno del curso, además de estar compuesto por ejercicios tanto de controles como de guías de años anteriores, el escrito consta de dos partes fundamentales, la primera constará de treinta problemas resueltos donde se exhibe el método y la solución del problema, en esta primera etapa partiremos con diecisiete para posteriormenre llegar a los treinta, la segunda parte incluye treinta problemas propuestos muchos de ellos con su respectiva solución donde el lector puede comprobar sus conocimientos en la materia, la reciente edición de "Problemas resueltos y propuestos de cálculo en varias variables"puede ser ampliada en futuros años, cualquier duda o sugerencia como tambin si encuentra errores en el documento favor de enviar un mail a la dirección frvilche@ing.uchile.cl .

Francisco Vilches Medina
Santiago, 11 de mayo del 2011

Parte I
Problemas resueltos

$\boxed{\textbf{P1}}$ Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ continuas. Mostrar que:

$$\iint_R [f(x)g(y)]dxdy = \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_c^d g(y)dy\right]$$

donde $R = [a,b] \times [c,d]$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

Consideremos la partición de $[a,b]$:

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b, \text{ tal que } x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

Luego la suma de Riemann de f será:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=o}^{n-1} f(C_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Como y está definida en el mismo intervalo que x, usaremos la misma partición para y, esto es:

$$y_{j+1} - y_j = \frac{b-a}{n}$$

Luego:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(C_{ij})\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

Ahora bien, $C_{ij} \in [a,b] \times [a,b] \Rightarrow C_{ij} = (x_i, y_i)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i)g(y_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) g(y_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} g(y_j)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Luego, como tanto g y f son integrables en $[a, b]$.

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right) \ y \ S_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} g(y_j) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

convergen y sus límites no dependen de los x_i e y_j elegidos. Por lo tanto se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} g(y_j) \left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = S_1 \cdot S_2 \Rightarrow$$

existe, y no depende de los $C_{ij} = (x_i, y_j)$. Así (escogiendo los (x_i, y_j) que realizan el máximo y mínimo en cada rectángulo), hemos encontrado una sucesión de reticulados S_n para los cuales:

$$\lim_{n\to\infty} S_{S_n}(f) - I_{S_n}(f) = 0$$

Luego f es integrable.

$\boxed{\textbf{P2}}$ Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, funciones acotadas e integrables en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo.

Demuestre utilizando las propiedades básicas de integrabilidad que:

$$\frac{1}{2}\int_{[a,b]\times[a,b]}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2 = \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx-\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{[a,b]\times[a,b]}(f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \left(f^2(x)g^2(y) - 2f(x)f(y)g(x)g(y) + f^2(y)g^2(x)\right) dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b f^2(x)g^2(y)dydx - \int_a^b\int_a^b f(x)g(x)f(y)g(y)dydx + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b f^2(y)g^2(x)dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(y)dy - \int_a^b f(x)g(x)dx \cdot \int_a^b f(y)g(y)dy + \frac{1}{2}\int_a^b f^2(y)dy \cdot \int_a^b g^2(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \\
&= \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2
\end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. (Nótese que para pasar de la tercera a la cuarta línea se usó el resultado obtenido en el P1, además se utilizó el hecho de que la variable es muda, por lo que se reemplazaron x e y como variables de integración según conveniese)

P3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

utilizando el Teorema de Fubini.

Hint: Defina la función $g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, e integre sobre un rectángulo arbitrario $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Luego justifique el hecho de que una función continua es nula ssi su integral calculada sobre cualquier rectángulo es nula.

Solución:

Sea $g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ y $R = [a,b] \times [c,d]$ el rectángulo de vértices $(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)$ con a, b, c, d arbitrarios, entonces:

$$\begin{aligned}
\iint_R g(x,y)dA &= \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \right) dydx \\
&= \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dydx - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)dydx \\
&= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)dydx \quad \text{(Aplicando Fubini)} \\
&= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_a^b dy - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_c^d dx \\
&= \int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y) \right) dy - \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,c) \right) dx \\
&= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(b,y)dy - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)dy - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,d)dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,c)dx \\
&= f(b,y)\Big|_c^d - f(a,y)\Big|_c^d - f(x,d)\Big|_a^b + f(x,c)\Big|_a^b \\
&= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c) - f(b,d) + f(a,d) + f(b,c) - f(a,c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

P4 Calcular:

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3}\ dxdy$$

Solución:

Dado que la función $f(x) = e^{x^3}$ no posee primitiva elemental, la integral iterada no puede calcularse tal como está por lo que necesitamos invertir el orden de integración, la región de integración son los $\left\{(x,y)/0 \leq y \leq 2,\ \frac{y}{2} \leq x \leq 1\right\}$, de ambas desigualdades deducimos que $0 \leq x \leq 1$ (ver nota al pie de la página)[1], de la primera desigualdad se obtiene que $0 \leq y$ y de la segunda $y \leq 2x$ luego $0 \leq y \leq 2x$, entonces revirtiendo el orden de integración tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3}\ dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2x} ye^{x^3} dydx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}e^{x^3}\right)\Bigg|_0^{2x} dx \\
&= 2\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx \quad \text{Usando el c.v } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \tfrac{du}{3x^2} \text{ y el T.F.C} \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 e^u du \\
&= \frac{2}{3}(e-1)
\end{aligned}$$

[1]Para determinar el dominio maximal de x basta ver cuál valor de y maximiza el intervalo en que se mueve la variable x, en este caso para $y = 0$ se obtiene $0 \leq x \leq 1$ que es el rango más grande para x, por ejemplo para $y = \frac{3}{2}$ obtenemos que $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ que es un subconjunto de $0 \leq x \leq 1$

P5

a) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que:

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 g(t)dt \right) dx = \int_0^1 tg(t)dt$$

b) Calcular:

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{\frac{-y}{x}} dx \right) dy$$

Solución:

a) La región de integración son los $\{(x,y)/\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq t \leq 1\}$, de ambas desigualdades se tiene que $0 \leq t \leq 1$, de la segunda desigualdad se tiene que $x \leq t$ y de la primera $0 \leq x$, entonces $0 \leq x \leq t$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_x^1 g(t)dt \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^t g(t)dx \right) dt \\
&= \int_0^1 tg(t)dt
\end{aligned}$$

b) Invirtiendo el orden de integración se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{\frac{-y}{x}} dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{-y}{x}} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-xe^{\frac{-y}{x}} \Big|_0^x \right) dx \\
&= \left(1 - \frac{1}{e} \right) \int_0^1 xdx \\
&= \left(1 - \frac{1}{e} \right) \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{e-1}{2e}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{P6}}$ Calcular:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-5x} - e^{-10x}}{x} dx$$

<u>Hint</u>: Escriba el integrando de la integral pedida como una integral definida para convertirla en una integral doble.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

Usando el Hint entregado notemos que $f(x) = \dfrac{e^{-5x} - e^{-10x}}{x} = \displaystyle\int_5^{10} e^{-yx} dy$, entonces:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-5x} - e^{-10x}}{x} dx = \int_0^{\infty} \int_5^{10} e^{-yx} dy dx$$

Invirtiendo el orden de integración en la última integral tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{e^{-5x} - e^{-10x}}{x} dx &= \int_0^{\infty} \int_5^{10} e^{-yx} dy dx \\
&= \int_5^{10} \int_0^{\infty} e^{-yx} dx dy \\
&= \int_5^{10} \left(\frac{-e^{-yx}}{y} \right) \Bigg|_0^{\infty} dy \\
&= \int_5^{10} \frac{dy}{y} \\
&= ln(y) \Big|_5^{10} \\
&= ln(10) - ln(5) \\
&= ln(2)
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{P7}}$ [2] Pruebe que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solución:

Consideremos la función de dos variables $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$ y los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ $B(0,R),\ B(0,2R)$ y $C_R = [-R,R]\times[-R,R]$, notemos que $B(0,R)\subseteq C_R \subseteq B(0,2R)$ por lo que:

$$\iint_{B(0,R)} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{B(0,2R)} e^{-x^2-y^2}dxdy \qquad (1)$$

Esto último se debe a que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = e^{-x^2-y^2} > 0$ por lo que en la suma de definición de la integral existen sólo términos positivos, esto último implica que si $A\subseteq B$ entonces $\iint_A e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_B e^{-x^2-y^2}dxdy$. Pasando a coordenadas polares las integrales de la desigualdad (1) se tiene que:

$$\iint_{B(0,R)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^R\int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2}d\theta d\rho = \pi(1-e^{-R^2})$$

Análogamente:

$$\iint_{B(0,2R)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2R}\int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2}d\theta d\rho = \pi(1-e^{-4R^2})$$

Por otro lado notemos que $\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-R}^R\int_{-R}^R e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy$ y usando el resultado del P1 se concluye que:

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-R}^R\int_{-R}^R e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{-R}^R e^{-x^2}dx\cdot\int_{-R}^R e^{-y^2}dy$$

Pero como la variable es "muda"se obtiene que

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

[2] El cálculo de esta integral es especialmente relevante en Probabilidades, su cálculo es complejo y no se espera que un alumno la resuelva sin uso de indicaciones sin embargo se presenta su demostración para ilustrar una de las muchas aplicaciones de la integral múltiple y justificar la identidad de la portada.

Reemplazando los cálculos hechos en la desigualdad (1) se tiene:

$$\pi(1-e^{-R^2}) \leq \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \pi(1-e^{-4R^2})$$

Tomando límite cuando $R \to \infty$ en la última desigualdad tenemos:

$$\lim_{R\to\infty} \pi(1-e^{-R^2}) \leq \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \lim_{R\to\infty} \pi(1-e^{-4R^2})$$

$$\Longrightarrow \pi \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \pi$$

Usando el teorema del Sandwich se concluye que:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi \implies \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Notando que la función $f(x) = e^{-x^2}$ es una función par se conluye finalmente que:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\boxed{\textbf{P8}}$ Calcule

$$I = \int_0^1 \int_w^1 \int_y^1 e^{x^3} dxdydw$$

Indicación: Escriba la integral de la forma $\int\int\int ...dydxdw$ integre una vez y luego escriba la integral resultante como $\int\int ...dwdx$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

La región de integración cumple las desigualdades $0 \leq w \leq 1$ (1), $w \leq y \leq 1$ (2),$y \leq x \leq 1$ (3), de (2) y (3) considerando a w un número fijo se obtiene que $w \leq x \leq 1$ y que $w \leq y \leq x$ (ver nota al pie de la página)[3], entonces:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_w^1 \int_y^1 e^{x^3} dxdydw \\
&= \int_0^1 \int_w^1 \int_w^x e^{x^3} dydxdw \\
&= \int_0^1 \int_w^1 \left(xe^{x^3} - we^{x^3} \right) dxdw
\end{aligned}$$

La nueva región de integración son los $\{(w, x)/0 \leq w \leq 1,\ w \leq x \leq 1\}$, cambiamos nuevamente los límites de integración obteniendo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq w \leq x$, entonces:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_w^1 \left(xe^{x^3} - we^{x^3} \right) dxdw \\
&= \int_0^1 \int_0^x \left(xe^{x^3} - we^{x^3} \right) dwdx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx \quad \text{Usando el c.v } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx \Rightarrow dx = \tfrac{du}{3x^2} \text{ y el T.F.C} \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 e^u du \\
&= \frac{e-1}{6}
\end{aligned}$$

[3]Notemos que cambiar el orden de integración en este caso es equivalente al de cambiar el orden en una integral doble donde las funciones dependientes de la primera variable, en este caso las funciones $f(w) = w$ y $f(w) = 1$ presentes en la desigualdad (2), son considerados números fijos, es decir como si las funciones estuvieran evaluadas por algún numero w perteneciente al dominio dado para w, en este caso $w \in [0, 1]$

P9 Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Representar el sólido y calcular su volumen por integración múltiple.

Solución:

El plano $x+2y+3z=0$ intersecta al plano $z=0$ en la recta de ecuación $x+2y=6$, esta última recta intersecta al eje x en el punto de coordenadas $(6,0,0)$, de esto se deduce que los límites de integración serán $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 3-\frac{x}{2}$, $0 \leq z \leq 2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} dzdydx \\
&= \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}\right) dydx \\
&= \int_0^6 \left(2\left(3-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{3}\left(3-\frac{x}{2}\right)-\frac{(3-\frac{x}{2})^2}{3}\right) dx \\
&= \int_0^6 \left(\frac{x^2}{12}-x+3\right) dx \\
&= \left(\frac{x^3}{36}-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^6 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

P10 Calcular el volumen del sólido bajo el plano $3x + 8y + 6z = 24$ y sobre la región del plano XY limitada por la parábola $y^2 = 2x$, la recta $2x+3y = 10$ y el eje x.

Solución:

Notemos que las curvas del plano XY se intersectan en el punto de coordenadas (2,2,0) por lo que la región del plano XY puede ser descrita por $\left\{(x, y)/0 \leq y \leq 2,\ \frac{y^2}{2} \leq x \leq 5 - \frac{3y}{2}\right\}$, naturalmente $0 \leq z \leq 4 - \frac{4y}{3} - \frac{x}{2}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{2}}^{5-\frac{3y}{2}} \int_0^{4-\frac{4y}{3}-\frac{x}{2}} dzdxdy \\
&= \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{2}}^{5-\frac{3y}{2}} \left(4 - \frac{4y}{3} - \frac{x}{2}\right) dxdy \\
&= \int_0^2 \left(4x\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{5-\frac{3y}{2}} - \frac{4xy}{3}\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{5-\frac{3y}{2}} - \frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{5-\frac{3y}{2}} \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{y^4}{16} + \frac{2}{3}y^3 - \frac{9}{16}y^2 - \frac{107}{12}y + \frac{55}{4} \right) dy \\
&= \frac{y^5}{80}\Big|_0^2 + \frac{y^4}{6}\Big|_0^2 - \frac{3}{16}y^3\Big|_0^2 - \frac{107}{24}y^2\Big|_0^2 + \frac{55}{4}y\Big|_0^2 \\
&= \frac{2}{5} + \frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{107}{6} + \frac{55}{2} \\
&= \frac{337}{30}
\end{aligned}
$$

P11 Calcular el volumen del sólido bajo el plano $z = 4x$ y que está sobre la circunferencuia $x^2 + y^2 = 16$.

Solución:

El recinto de integración satisface las ecuaciones en coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 \leq 16$ (parte interna del cilindro), $z \geq 0$ (parte superior al plano XY)y $z \leq 4x$ (parte inferior al plano $z = 4x$), pasando a coordenadas polares estas inecuaciones se tiene que el recinto de integración cumple $\rho \leq 4$ (1), $z \geq 0$ (2), $z \leq 4\rho cos(\theta)$ (3), dado que $z \geq 0$ y $\rho \geq 0$ se tiene que $cos(\theta) \geq 0$ (por (3)) para todos los puntos del recinto (pues $z \geq 0$) luego $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dado que en (2) y en (3) ρ es "libre"se tiene que $0 \leq \rho \leq 4$ por último de (2) y (3) se obtiene $0 \leq z \leq 4\rho cos(\theta)$, resumiendo, los límites de integración son: $0 \leq \rho \leq 4$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq 4\rho cos(\theta)$, entonces:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\rho cos(\theta)} \rho dz d\theta d\rho \\
&= \int_0^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\rho^2 cos(\theta) d\theta d\rho \\
&= 4 \int_0^4 \rho^2 \left(sin(\theta)\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho \\
&= 8 \int_0^4 \rho^2 d\rho \\
&= 8 \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^4 \\
&= \frac{512}{3}
\end{aligned}$$

P12 Hallar el volumen limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

Solución:

Dado que la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pone la tapa superior del recinto de integración y el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = 3z$ pone la inferior se deduce que el recinto será aquel que en coordenadas cartesianas satisfaga las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ y $x^2 + y^2 \geq 3z$ pasando a coordenadas polares las condiciones anteriores son equivalentes a $\rho^2 + z^2 \leq 4 \quad (1)$ y $\rho^2 \geq 3z \quad (2)$, notando que el paraboloide intersecta a la esfera a la altura $z = 1$, es decir en los puntos tales que $x^2 + y^2 = 3$ y $z = 1$, entonces el recinto de integración será en coordenadas polares $0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{\rho^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}$, la última desigualdad se deduce de las desigualdades (1) y (2), de (2) se tiene $\frac{\rho^2}{3} \leq z$ y de (1) al despejar z considerando $z \geq 0$ pues para todo punto perteneciente al paraboloide se tiene $z \geq 0$ se deduce $z \leq \sqrt{4 - \rho^2}$ juntando las últimas 2 desigualdades se tiene $\frac{\rho^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz \, d\theta \, d\rho \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left(\rho\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^3}{3} \right) d\theta \, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\rho\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^3}{3} \right) d\rho \\
&= \left(2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\sqrt{4 - \rho^2} d\rho \right) - \pi \frac{\rho^4}{6} \Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&= \pi \int_1^4 \sqrt{u} du - \frac{3\pi}{2} \quad \text{Usando el c.v } u = 4 - \rho^2 \text{ y el T.F.C en la integral} \\
&= \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} \\
&= \frac{19\pi}{6}
\end{aligned}
$$

P13 Hallar el volumen limitado por las superficies $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $z=xy$, $z=0$.

Solución:

El recinto de integración satisface en coordenadas cartesianas las inecuaciones $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1$, $z \leq xy$, $z \geq 0$ Para este problema usaremos coordenadas polares modificadas, es decir utilizaremos la transformación $T(\rho,\theta,z) = (x,y,z) = (\rho cos(\theta)+1, \rho sin(\theta)+1, z)$ cuyo jacobiano es $J(T)=\rho$, pasando las inecuaciones anteriores a polares modificadas tenemos que la región satisface $\rho^2 \leq 1$ (1), $z \leq (1+\rho cos(\theta))(1+\rho sin(\theta))$ (2),$z \geq 0$ (3), de (1) se deduce que $0 \leq \rho \leq 1$, dado ρ fijo no existe restricción sobre θ luego $0 \leq \theta \leq 2\pi$ de (2) y (3) se deduce que $0 \leq z \leq 1+\rho(cos(\theta)+sin(\theta))+\rho^2 cos(\theta)sin(\theta)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\rho(cos(\theta)+sin(\theta))+\rho^2 cos(\theta)sin(\theta)} \rho dz d\theta d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\left(1+\rho(cos(\theta)+sin(\theta))+\rho^2 cos(\theta)sin(\theta)\right) d\theta d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\rho+\rho^2(cos(\theta)+sin(\theta))+\rho^3 cos(\theta)sin(\theta)\right) d\theta d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\rho\theta\Big|_0^{2\pi} + \rho^2 sin(\theta)\Big|_0^{2\pi} - \rho^2 cos(\theta)\Big|_0^{2\pi} + \rho^3 \frac{sin^2(\theta)}{2}\Big|_0^{2\pi} \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho d\rho \\
&= \pi\rho^2\Big|_0^1 \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

P14 Hallar el volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

Solución:

El sólido al estar limitado por los cilindros indicados cumple las desigualdades $x^2 + y^2 \leq a^2$ y $x^2 + z^2 \leq a^2$ de la primera y segunda desigualdad se observa que $-a \leq x \leq a$, de la primera dado x fijo se tiene que $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ y de la segunda se deduce que $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ por lo que:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dzdydx \\
&= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2 - x^2}dydx \\
&= 2\int_{-a}^{a} \left(2a^2 - 2x^2\right) dx \\
&= 4a^2 \int_{-a}^{a} dx - 4\int_{-a}^{a} x^2 dx \\
&= 8a^3 - \left.\frac{4x^3}{3}\right|_{-a}^{a} \\
&= 8a^3 - \frac{8a^3}{3} \\
&= \frac{16a^3}{3}
\end{aligned}
$$

P15 Calcule:

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

donde $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

Solución:

Usando la transformación $T(r,\theta,\phi) = (rcos(\theta)sen(\phi), rsen(\theta)sen(\phi), rcos(\phi))$ (coordenadas esféricas) con $J(T) = r^2 sen(\phi)$ se tiene que la región de integración son los $1 \le r^2 \le 9 \Rightarrow 1 \le r \le 3$, $0 \le rcos(\phi) \le rsen(\phi) \Leftrightarrow 0 \le cos(\phi) \le sen(\phi)$, como $0 \le cos(\phi) \Rightarrow \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, además $cos(\phi) \le sen(\phi) \Rightarrow 1 \le tan(\phi)$ (notando que $cos(\phi) \ge 0$ para $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, por lo que podemos dividir a ambos lados de la última desigualdad sin alterar el conjunto solución) por lo que $\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$, como no hay restricción para θ se tiene que $0 \le \theta \le 2\pi$, entonces:

$$\begin{aligned}
\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 sen(\phi)\,d\phi d\theta dr \\
&= \int_1^3 \int_0^{2\pi} -r^3 cos(\phi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta dr \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^3 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr \\
&= \sqrt{2}\pi \int_1^3 r^3 dr \\
&= \sqrt{2}\pi \frac{r^4}{4}\Big|_1^3 \\
&= \sqrt{2}\pi \left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= 20\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

P16 Calcule

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) \, dxdydz$$

Hint: Considere el cambio de variables lineal: $u = \dfrac{2x-y}{2}$, $v = \dfrac{y}{2}$, $w = \dfrac{z}{3}$.

Solución:

Considerando la transformación lineal $T(x,y,z) = (u,v,w) = \left(\dfrac{2x-y}{2}, \dfrac{y}{2}, \dfrac{z}{3} \right)$ tenemos que

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}$$

, pero como la transformación va desde los puntos (x,y,x) a (u,v,x) necesitamos $|J(T)|^{-1} = 6$, la región de integración son los (x,y,z) tales que $0 \leq z \leq 3 \quad (1)$, $0 \leq y \leq 4 \quad (2)$, $\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y}{2} + 1 \quad (3)$, dividiendo (1) por 3 tenemos que $0 \leq \frac{z}{3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq w \leq 1$ dividiendo (2) por 2 se tiene que $0 \leq \frac{y}{2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq v \leq 2$ como $u = \frac{2x-y}{2} \Rightarrow x = u + \frac{y}{2} = u + v$, por lo que reemplazando en (3) se tiene $v \leq u + v \leq v + 1 \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) \, dxdydz &= 6 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 (u+w) \, dvdwdu \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 (u+w) \, dwdu \\
&= 12 \int_0^1 \left(u + \frac{1}{2} \right) du \\
&= 12 \int_0^1 udu + 6 \int_0^1 du \\
&= 12 \frac{u^2}{2} \bigg|_0^1 + 6u \bigg|_0^1 \\
&= 6 + 6 \\
&= 12
\end{aligned}$$

P17 Una bola centrada en el origen y de radio R se corta por un plano horizontal a una altura h $(0 < h < R)$. Calcular el volumen de la parte superior de la esfera que se encuentra sobre dicho plano.

Solución:

La región de integración satisface las desiguladades $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ (por ser interna a la esfera) y $z \geq h$ (por estar sobre el plano a altura h),de la primera desigualdad se tiene que $-R \leq z \leq R$, de la segunda se tiene que $z \geq h$ como los puntos de la región de integración deben satisfacer ambas desigualdades se tiene que $h \leq z \leq R$, dejando a z fijo se tiene que $-\sqrt{R^2 - z^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - z^2}$, ahora dejando a x y z fijos se tiene que $-\sqrt{R^2 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_h^R \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} dydxdz \\
&= 2\int_h^R \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}dxdz \\
&= 2\int_h^R \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{\sqrt{R^2 - z^2}^2 - x^2}dxdz \\
&= 2\int_h^R \left(\frac{(R^2 - z^2)arcsin(\frac{x}{\sqrt{R^2-z^2}})}{2} + \frac{x\sqrt{R^2 - z^2 - x^2}}{2} \right) \Bigg|_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dz \\
&= 2\int_h^R \frac{\pi}{2}(R^2 - z^2)dz \\
&= \pi \int_h^R (R^2 - z^2)dz \\
&= \pi \int_h^R R^2 dz - \pi \int_h^R z^2 dz \\
&= (R - h)\pi R^2 - \pi\frac{(R^3 - h^3)}{3} \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{\pi h^3}{3} - h\pi R^2
\end{aligned}
$$

Parte II
Problemas propuestos

$\boxed{\textbf{P1}}$ Usar el cambio de variables $u = y - x$, $v = y + x$ para hallar

$$\iint_D sen\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dxdy$$

donde D es el trapecio con vértices $(1,1),(2,2),(4,0),(2,0)$.

Solución: $3(cos(1) - 1)$

$\boxed{\textbf{P2}}$ Calcular

$$\iint_D (2x+y)^{-3} e^{\frac{x-2y}{2x+y}} dxdy$$

donde D es la región acotada por $2x + y = 1,\ 2x + y = 4,\ x - 2y = -1,\ x - 2y = 1$.

Solución: $-\frac{1}{5}(e^{\frac{1}{4}} + e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1})$

$\boxed{\textbf{P3}}$ Hallar el área del recinto encerrado por una elipse de semiejes a y b.

Solución: $ab\pi$

$\boxed{\textbf{P4}}$ Calcular $\iiint_R z\ dV$ si R es la región limitada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$.

Solución: $\frac{243}{2}\pi$

$\boxed{\textbf{P5}}$ Utilizando el cambio $x = u - \frac{v}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2v}{\sqrt{3}}$. Calcular $\iint_M e^{x^2+y^2+xy} dxdy$ en donde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + xy < 1\right\}$$

Solución: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(1 - e^{-1})$

$\boxed{\textbf{P6}}$ Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z = 2x^2 + y^2$. $z = 4 - y^2$.

Solución: 4π

$\boxed{\mathbf{P7}}$ Calcular $\iint_R |sen(x+y)|dxdy$, si $R = [0,\pi]\times[0,\pi]$.

Solución: 2π

$\boxed{\mathbf{P8}}$ Se consideran $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \int_0^{x-y} g(t)\ dt + \int_{x+y}^0 h(t)\ dt$$

Probar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$\boxed{\mathbf{P9}}$ Usar coordenadas esféricas para calcular $\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, siendo

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\right\}$$

$\boxed{\mathbf{P10}}$ Hallar $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy$ donde

$D = \left((x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x>0,\ y>0,\ a \leq xy \leq b,\ y^2-x^2 \leq 1,\ x \leq y,\ con\ 0<a<b\right\}$

Solución: $\frac{1}{2}log\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$

$\boxed{\mathbf{P11}}$ Considere $I = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y}(x^2+y^2)dxdy$

a) Calcule I directamente.
b) Dibuje la región de integración.
c) Calcule I invirtiendo el orden de integración.

$\boxed{\mathbf{P12}}$ Una placa de metal triangular homogéneo de masa M tiene vértices $(0,0),(1,0),(0,3)$. Encuentre su momento de inercia, definido por:

$$I_x = \iint_\Omega \rho(x,y)y^2dxdy, \quad I_y = \iint_\Omega \rho(x,y)x^2dxdy$$

donde Ω es la región que define la placa y ρ es la densidad.

$\boxed{\textbf{P13}}$ Considere la integral iterada:

$$\int_0^{2a}\left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy\right)dx$$

donde f es una función continua.

a) Haga un bosquejo de la región de integración.
b) Exprese I como una integral iterada cambiando el orden de integración.

$\boxed{\textbf{P14}}$ Calcule:

$$\int_0^1\int_w^1 (x-w)sen(x^3)dxdw$$

Solución: $\frac{1}{2}(1-cos(1))$

$\boxed{\textbf{P15}}$ Calcule:

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

donde $R=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|1\leq x^2+y^2+z^2\leq 9,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

$\boxed{\textbf{P16}}$ Sea $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\geq 1,\ (x-1)^2+y^2\leq 1\}$ y:

$$T(u,v)=\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{-v}{u^2+v^2}\right)$$

a) Dibuje Ω, encuentre y dibuje D tal que $T(D)=\Omega$.
b) Pruebe que T es inyectiva en su dominio.
c) Calcule $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{(x^2+y^2)^2}dxdy$.

$\boxed{\textbf{P17}}$ Calcular $\iint_D xdxdy$ en que D es la región acotada por:

$$x=-y^2,\ x=2y-y^2,\ x=2-2y-y^2$$

<u>Hint</u>: Haciendo un dibujo busque un cambio de variables apropiado.

$\boxed{\textbf{P18}}$ Para calcular la integral:

$$I = \int_0^{asen(\beta)} \int_{acot(\beta)}^{\sqrt{a^2-y^2}} ln(x^2+y^2)dxdy, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

a) Describa analíticamente el dominio de integración D, y haga un dibujo de él.

b) Utilice un cambio de coordenadas apropiado de acuerdo a la geometría de D, para calcular I.

$\boxed{\textbf{P19}}$ Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ la región

$$E = \{(x, y, z) : \; z \geq 0, \; x + 2y + z \leq 1, \; y \geq |x|\}.$$

Calcule por integración el volumen de E y encuentre

$$\iiint_E y \; dV.$$

$\boxed{\textbf{P20}}$ Hallar el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, el paraboloide $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$.

Solución: $\frac{7\pi}{2}$

$\boxed{\textbf{P21}}$ Calcular el área del recinto del primer cuadrante comprendido entre el eje de ordenadas y la curva $x^2 + y^2 = (\frac{y}{x})^r, \; 0 < r < 1$

Solución: $\frac{\pi}{4cos(\frac{\pi r}{2})}$

$\boxed{\textbf{P22}}$ Hallar el volumen del cuerpo del primer octante limitado por la superficie $x^2 + y^2 = e^{-2z}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Solución: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

$\boxed{\textbf{P23}}$ Calcular el volumen del sólido que contiene al punto $(0,0,1)$ y está comprendido entre las superficies $z = 0$ y $z = -2ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución: π

$\boxed{\textbf{P24}}$ En el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ se define la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx$$

$\boxed{\textbf{P25}}$ Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, funciones acotadas e integrables en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo.

Demuestre utilizando las propiedades básicas de integrabilidad que:

$$\frac{1}{2}\int_{[a,b]\times[a,b]} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

$\boxed{\textbf{P26}}$

a) Sea Q un rectángulo de $\mathbb{R}^N$ y $f : Q \to \mathbb{R}$ tal que f es continua sobre $int(Q)$ y acotada sobre Q.
Pruebe que f es integrable.
Hint: Utilice una sucesión de rectángulos Q_n que aproximen a Q y use la integrabilidad de f sobre Q_n.

b) Pruebe que la función $f : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{||x||}\right) & si \text{ x} \neq 0 \\ 0 & si \text{ x=0} \end{cases}$$

es integrable.

P27 Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuas. Mostrar que:

$$\iint_R [f(x)g(y)]dxdy = \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_c^d g(y)dy\right]$$

donde $R = [a, b] \times [c, d]$.

P28 Usando sumas de Riemann demuestre que las siguientes funciones son integrables y calcule su valor:

a) $f(x, y) = x + 4y$, $\Omega = \{(x, y)/0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y$, $\Omega = \{(x, y)/0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

P29 Hallar las siguientes integrales dobles impropias:

(a) $\iint_S \frac{dxdy}{1-x^2-y^2}$, donde $S = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1\}$.

(b) $I(p) = \iint_S \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$, $p > 0$, donde $S = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \ge 1\}$.

(c) $\iint \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$, extendida a todo el plano y a cada uno de los recintos limitados por $y^2 = 2x$.

Solución: (a) 2π; (b) $I(p) = \frac{\pi}{p-1}$ si $p > 1$, e $I(p) = \infty$ si $0 < p \le 1$;
(c) π, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ y $\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\pi$.

P30 Hallar las siguientes integrales triples impropias:

(a) $I(p, q, r) = \iiint_D \frac{dxdydz}{x^p y^q z^r}$, con $p, q, r > 0$, donde $D = \{(x, y, z) : \ 0 \le x, y, z \le 1\}$.

$(b)\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

(c) $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$.

Solución: (a) $I(p, q, r) = \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}$ si $0 < p, q, r < 1$, y divergente en el resto de casos; (b) $\frac{\pi^2}{a}$; (c)$\pi\sqrt{\pi}$