Auxiliar 3 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 23 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Demuestre que las fórmulas para las áreas de las superficies de revolución de una función de una variable (i.e. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$) en torno al eje x e y, las cuales fueron vistas en el curso de cálculo, y que son respectivamente:

$$A_x(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$
$$A_y(f) = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Son consistentes con la definición de área dada en nuestro curso.

Pregunta 2. Sea S el grafo de una función $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcule el vector normal a S en cada punto y pruebe que:

$$A(S) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

Pregunta 3. Considere el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ con $R > 0$ constante. Se le pide:

a) Determinar el área de la parte del cono que está dentro de la esfera.
b) Determinar el área de la parte de la esfera que está dentro del cono.

Pregunta 4. Sea S la esfera de radio R y $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ (que no está en S). Demuestre que:

$$\iint_S \frac{1}{||\vec{x} - \vec{p}||} dA = \begin{cases} 4\pi R & \text{Si } ||\vec{p}|| < R \\ 4\pi R^2/d & \text{Si } ||\vec{p}|| > R \end{cases}$$

Determine d en el segundo caso.
Indicación: Note que no hay pérdida de generalidad al suponer que $\vec{p} = ||\vec{p}||\hat{k}$ (Esto pues, en caso contrario basta realizar una rotación de los ejes, lo cual deja el resultado invariante)

Pregunta 5. Sea S la superficie regular dada por las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \; x^2 + y^2 - 2ay \leq, \; a > 0, \; x \geq 0, \; z \geq 0$$

a) Bosqueje S, parametricela y calcule su área.
b) Escoja una orientación para S y calcule el flujo del campo vectorial en coordenadas cilíndricas dado por:

$$\vec{F} = \rho\hat{\rho} + \cos^2\theta \cdot e^{\cos^3\theta}\hat{\theta}$$