Pauta Auxiliar 3 (desde el corte de luz) - MA2002 2012/2.

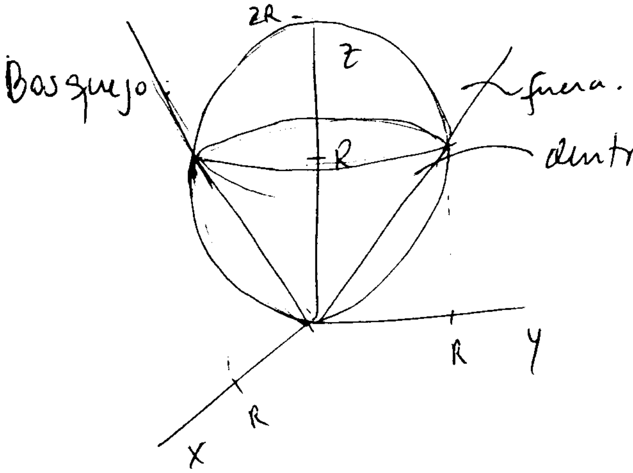
P3 Cono de ecuación $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$

Esfera. $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $R>0$.

$$\Rightarrow x^2+y^2+\underbrace{(z^2-2Rz+R^2)} = R^2$$

$$x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2 \leftarrow \text{centro } (0,0,R), \text{ radio } R.$$

Bosquejo



(el corte "paralelo" al plano XY muestra que en esa altura los círculos coinciden!)

a) La parte del cono que está dentro de la esfera es el cono hasta la altura $z=R$, calculemos su área.

¿Parametrización? Basados en aux. 2, tomando $h=a=R$

$$\vec{\sigma}(\rho,\theta) = \rho\hat{\rho} + \frac{h}{a}\rho\hat{k} \underset{\uparrow_{h=a=R}}{=} \rho\hat{\rho}+\rho\hat{k} \quad \rho\in[0,R],\ \theta\in[0,2\pi].$$

$$\vec{\sigma}_\rho = \hat{\rho}+\hat{k} \quad \vec{\sigma}_\theta = \rho\hat{\theta}. \Rightarrow \vec{\sigma}_\rho\times\vec{\sigma}_\theta = (\hat{\rho}+\hat{k})\times\rho\hat{\theta}$$

$$= \rho(\hat{\rho}\times\hat{\theta}) + \rho(\hat{k}\times\hat{\theta}) = \rho\hat{k}+\rho(-\hat{\rho})$$

$$\Rightarrow \|\vec{\sigma}_\rho\times\vec{\sigma}_\theta\| = \sqrt{\rho^2+\rho^2} \underset{\uparrow_{\rho\geq 0}}{=} \sqrt{2}\rho$$

$$\therefore A(\text{cono dentro de esf}) = \iint_{\text{cono}} dA = \int_0^{2\pi}\int_0^R \|\vec{\sigma}_\rho\times\vec{\sigma}_\theta\|\,d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{2}\rho\, d\rho\, d\theta = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^2}{2}$$

$$\boxed{A = \sqrt{2}\pi R^2}$$

Obs. Esto coincide con nuestra fórmula usual.

$A_{\text{cono}} = \pi R g$ con g generatriz, que en nuestro caso es $\sqrt{2}R$.

$= \sqrt{2}\pi R^2$ ✓

b) ¿Esf. dentro del cono?

Vimos que la mitad de la esf. queda ~~[illegible]~~ incluyendo al cono $\Rightarrow$ La mitad queda dentro del cono.

$\therefore$ Aesf fuera del cono $= \frac{1}{2}$ Aesf $= \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi R^2$.

P4) $S =$ esf. de radio R, $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} \notin S$.

Calculemos $\iint_S \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} dA$, Spg: $\vec{p} = \|\vec{p}\| \hat{k}$

Dada la simetría de la superficie resulta natural trabajar en esféricas:

1º Parametrización de S: $\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi)$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_\theta = (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, 0)$$

$$\vec{\sigma}_\varphi = (+R\cos\theta\cos\varphi, R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -R\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi & -R\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi) + \hat{\jmath}(-R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\varphi) + \hat{k}(-R^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - R^2\cos^2\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\Rightarrow \|\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi\| = \left(R^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^4\varphi + R^4\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^4\varphi + R^4\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{1/2}$$

$$= \left(R^4\operatorname{sen}^4\varphi + R^4\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{1/2} = \left(R^4\operatorname{sen}^2\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)\right)^{1/2}$$

$$= \left(R^4\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{1/2} \underset{\substack{R>0 \\ \varphi\in[0,\pi]}}{=} R^2\operatorname{sen}\varphi$$

Así: $\boxed{dA = R^2\operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi}$

Por otro lado: $\|\vec{x} - \vec{p}\| = \|R\hat{r} - \|\vec{p}\|\hat{k}\|$

$$= \|(R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi - \|\vec{p}\|)\|$$

$$= \left(R^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + R^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + R^2\cos^2\varphi - 2R\cos\varphi\|\vec{p}\| + \|\vec{p}\|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(R^2\operatorname{sen}^2\varphi + R^2\cos^2\varphi - 2R\cos\varphi\|\vec{p}\| + \|\vec{p}\|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(R^2 - 2R\cos\varphi\|\vec{p}\| + \|\vec{p}\|^2\right)^{1/2}$$

Así, la integral de superf. es:

$$\iint_S \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{p}\,\|}\,dA \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en esf } \vec{x}=R\hat{r}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\|R\hat{r}-\|\vec{p}\|\hat{k}\,\|}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2 \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{R^2-2R\cos\varphi\|\vec{p}\|+\|\vec{p}\|^2}}\,d\varphi\, d\theta$$

no hay dep. de θ!

$$= 2\pi R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{R^2+\|\vec{p}\|^2-2R\cos\varphi\|\vec{p}\|}}\,d\varphi}_{I}$$

I es de la forma $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{a-b\cos\varphi}}\,d\varphi$ con a, b ctes.

Calculemos la primitiva:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{a-b\cos\varphi}}\,d\varphi \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{b}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{b}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1/2}\cdot u^{1/2}$$

$a-b\cos\varphi = u$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = b\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \frac{du}{b} = \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{b}\sqrt{a-b\cos\varphi}$$

Luego, en nuestro caso:

$$= 2\pi R^2\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}R\|\vec{p}\|}\cdot\sqrt{R^2+\|\vec{p}\|^2-2R\cos\varphi\|\vec{p}\|}\;\Bigg|_0^{\pi} \quad \begin{matrix}\leftarrow \text{vale } (-1) \\ \leftarrow \text{vale } 1\end{matrix}$$

$$= \frac{2\pi R}{\|\vec{p}\|}\left(\sqrt{R^2+\|\vec{p}\|^2+2R\|\vec{p}\|} - \sqrt{R^2+\|\vec{p}\|^2-2R\|\vec{p}\|}\right)$$

$$= \frac{2\pi R}{\|\vec{p}\|}\left(\sqrt{(R+\|\vec{p}\|)^2} - \sqrt{(R-\|\vec{p}\|)^2}\right) = \frac{2\pi R}{\|\vec{p}\|}\left(R+\|\vec{p}\| - |R-\|\vec{p}\||\right)$$

$\therefore$ Si $\|\vec{p}\| < R \Rightarrow |R-\|\vec{p}\|| = R-\|\vec{p}\| \Rightarrow \quad = \dfrac{2\pi R}{\|\vec{p}\|}\left(\cancel{R}+\|\vec{p}\| - \cancel{R}+\|\vec{p}\|\right) = 4\pi R.$

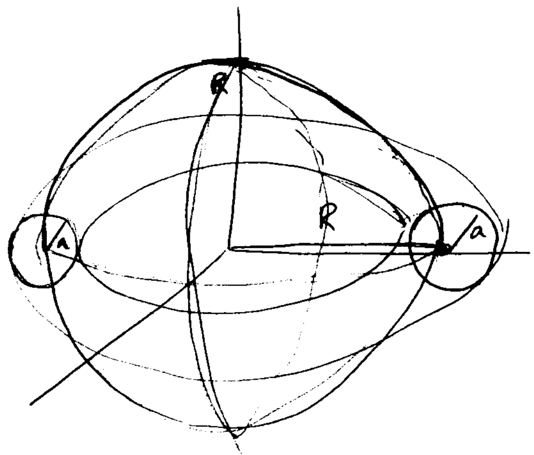
Si $\|\vec{p}\| > R \Rightarrow |R-\|\vec{p}\|| = \|\vec{p}\|-R \Rightarrow \quad = \dfrac{2\pi R}{\|\vec{p}\|}\left(R+\cancel{\|\vec{p}\|}+R-\cancel{\|\vec{p}\|}\right) = \dfrac{4\pi R^2}{\|\vec{p}\|}$

es decir $d = \|\vec{p}\|$. □

P3 Toro centro O, radios R, a. $(a < R)$

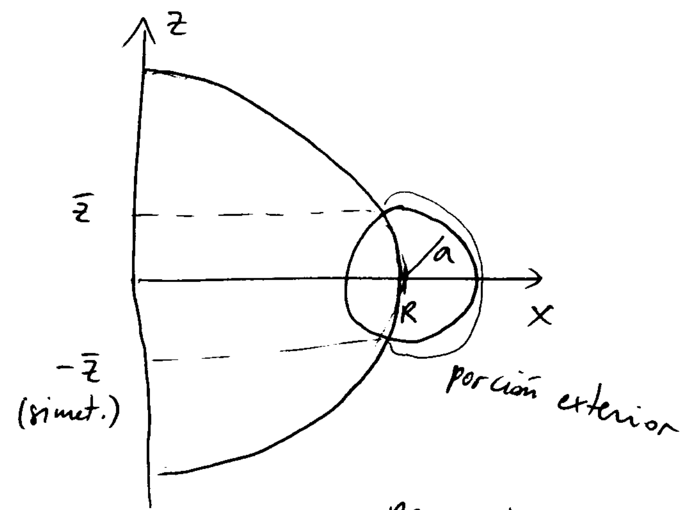
Σ = Toro fuera de $S(O, R)$

a)



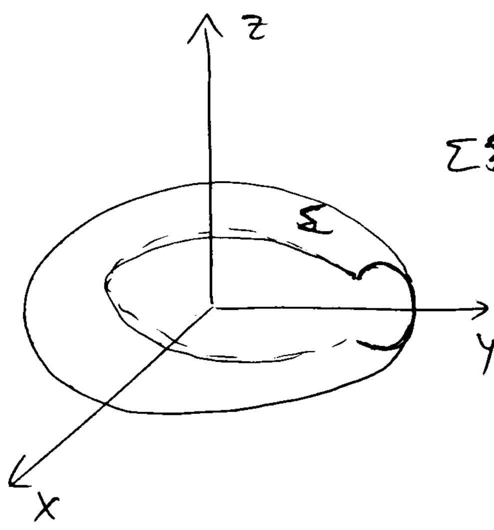
no es fácil de dibujar en 3D.

pero notemos, en 2D:



esto vale, por simetría ~~para~~ para todo "corte"

$\therefore$ Gráfico ~~de~~ Σ



Σ es la rotación de la porción vista antes.

b) Calculemos $\Phi = \iint_{\Sigma} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}$

La parametrización "natural" sería la del Toro, ~~para~~ previa determinación de los límites para φ que necesitaremos.

De lo visto en la Auxiliar 2; Sabemos que:

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = \left((R + a\,\text{sen}\,\varphi)\cos\theta,\ (R+a\,\text{sen}\,\varphi)\,\text{sen}\,\theta,\ a\cos\varphi\right)$$

$\theta\in[0,2\pi]$ φ depende de $\bar z$, encontrémoslo! $\left(\varphi \in [0,2\pi] \text{ o } \varphi\in[-\pi,\pi]\right)$

Debemos ver donde se intersectan la esfera con el toro:

Ecc. esfera: $x^2+y^2+z^2=R^2$ en cil: $\rho^2+z^2=R^2$.

¿Ecc toro? En cartesianas no es trivial, pero en cilíndricas:

$$(R-\rho)^2+z^2=a^2$$

Si las restamos: $\rho^2-(R-\rho)^2 = R^2-a^2$.

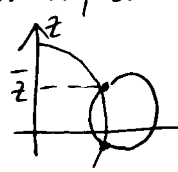
$$\cancel{\rho^2} - R^2 - \cancel{\rho^2} + 2R\rho = R^2 - a^2 \Rightarrow \rho = \frac{2R^2-a^2}{2R} = R - \frac{a^2}{2R}$$

Como $\rho^2+z^2=R^2 \Rightarrow z^2 = R^2-\rho^2 = R^2 - \left(R-\frac{a^2}{2R}\right)^2 = \left(R^2 - R^2 - \frac{a^4}{4R^2} + a^2\right)$

$$= a^2\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{4R^2-a^2}{4R^2}\right)$$

Obs. Es equivalente lo anterior a, como vimos en clase, Estudiar $\bar z$ en el plano ZX



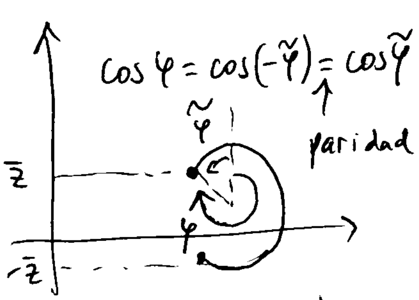
$z^2+x^2=R^2$ y $z^2+(x-a)^2=a^2$ $\Rightarrow$ mismo $\bar z$.

$$\Rightarrow \boxed{\bar z = \pm \frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}}$$

Pero $\bar z = a\cos\tilde\varphi \Rightarrow \cancel{a}\cos\tilde\varphi = \frac{\cancel{a}}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$

$$\sqrt{1-\text{sen}^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}} \Rightarrow \text{sen}\,\tilde\varphi = \frac{a}{2R}.$$

$$\boxed{\tilde\varphi = \arcsin\left(\frac{a}{2R}\right)}$$



Luego: $$\Phi = \iint_\Sigma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}\cdot \hat n\, dS = \int_{-\tilde\varphi}^{\pi+\tilde\varphi}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (R+a\,\text{sen}\,\varphi)\cos\theta \\ (R+a\,\text{sen}\,\varphi)\,\text{sen}\,\theta \\ a\cos\varphi\end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ \cos\varphi\end{pmatrix}}^{\hat r_{unit}} \cdot a(R+a\,\text{sen}\,\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{-\tilde{\varphi}}^{\pi+\tilde{\varphi}} \int_{0}^{2\pi} \Big((R + a \operatorname{sen}\varphi)\cos^2\theta \operatorname{sen}\varphi + (R + a\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi + a\cos^2\varphi \Big)\, a\,(R + a\operatorname{sen}\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{-\tilde{\varphi}}^{\pi+\tilde{\varphi}} \int_{0}^{2\pi} \Big((R + a\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\varphi + a\cos^2\varphi \Big)\, a\,(R + a\operatorname{sen}\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{-\tilde{\varphi}}^{\pi+\tilde{\varphi}} \int_{0}^{2\pi} (R + a\operatorname{sen}\varphi)\, a\,(R + a\operatorname{sen}\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{-\tilde{\varphi}}^{\pi+\tilde{\varphi}} 2\pi a\,(R + a\operatorname{sen}\varphi)^2\, d\varphi = \int_{-\tilde{\varphi}}^{\pi+\tilde{\varphi}} 2\pi a R^2 + 4\pi a^2 R \operatorname{sen}\varphi + 2\pi a^3 \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi.$$

$$= 2\pi a R^2(\pi + 2\tilde{\varphi}) + 4\pi a^2 R\big(\cos(\pi+\tilde{\varphi}) - \cos(-\tilde{\varphi})\big) + 2\pi a^3 \int_{-\tilde{\varphi}}^{\pi+\tilde{\varphi}} \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi.$$

$$= 2\pi a R^2(\pi + 2\tilde{\varphi}) + 4\pi a^2 R\big(\cos(\pi+\tilde{\varphi}) - \cos(\tilde{\varphi})\big) + 2\pi a^3 \cdot \left(\frac{1}{2}(\pi + 2\tilde{\varphi}) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\varphi \Big|_{-\tilde{\varphi}}^{\pi+\tilde{\varphi}} \right)$$

//