Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 13 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 3. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y - 3z + e^x \sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x\cos(z) - 3x)\hat{k}$$

(a) Calcule $rot(\vec{F})$.

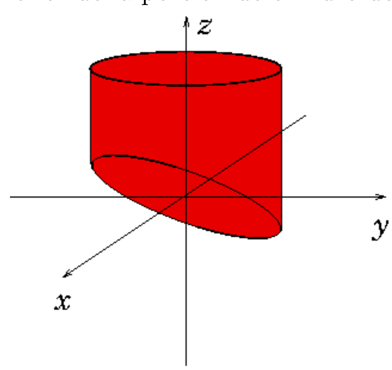
(b) Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\Gamma: \quad \vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcule:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilíndro de la figura siguiente:



Solución:

(a) Para esta parte basta aplicar directamente la fórmula del rotor en cartesianas:

$$\begin{aligned}
rot(\vec{F}) &= \det\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ (3x^2y - 3z + e^x\sin(z)) & x^2 & e^x\cos(z) - 3x \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}(\partial_y(e^x\cos(z) - 3x) - \partial_z(x^2)) + \hat{\jmath}(\partial_z(3x^2y - 3z + e^x\sin(z)) - \partial_x(e^x\cos(z) - 3x)) \\
&\quad + \hat{k}(\partial_x(x^2) - \partial_y(3x^2y - 3z + e^x\sin(z))) \\
&= \hat{\imath}(0 - 0) + \hat{\jmath}(-3 + e^x\cos(z) - e^x\cos(z) + 3) + \hat{k}(2x - 3x^2) \\
&= (0, 0, 2x - 3x^2)
\end{aligned}$$

(b) Para el cálculo de la integral de trabajo aplicaremos el Teorema de Stokes, para ello notemos algunas cosas básicas:

- El campo $\vec{F}$ es de clase C^∞ en todo el espacio, pues es composición de funciones C^∞, por lo tanto, podemos aplicar el Teorema en **cualquier** superficie regular a trozos cuyo borde geométrico sea Γ.
- La superficie dada en la indicación básicamente se puede ver como la sección superior de un cilíndro de altura $2z_0$ (con eje longitudinal coincidente al eje Z y $z \in [-z_0, z_0]$) al ser cortado en 'diagonal', donde este corte está parametrizado por Γ.
- Llamaremos S a esta superficie, notemos que satisface $\partial S = \Gamma$ siempre y cuando $z_0 > 1$ (es necesario pues en caso contrario el cilindro no queda bien definido). Además, al ser parte de un cilíndro, se tiene que S es una superficie regular a trozos, por lo tanto se satisfacen todas las hipótesis del Teorema de Stokes.

- Notar finalmente que las integrales de flujo involucradas, dada la orientación de Γ, deben calcularse con la normal exterior al cilindro.

Por lo tanto, por el Teorema de Stokes se tiene que:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Escribamos $S = S_1 \cup S_2$ donde S_1: Manto del cilindro y S_2: Tapa a altura $z_0 > 1$. Luego:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA + \iint_{S_2} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

del cálculo de la parte anterior se probó que el rotor solo posee componentes no nulas en $\hat{k}$ por lo tanto:

$$rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{en } S_1$$

pues en S_1 se tiene que $\hat{n} = \hat{\rho}$ que es ortogonal a $\hat{k}$, por lo tanto:

$$\iint_{S_1} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA = 0$$

luego:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

esta última integral se debe calcular por definición, primero notemos que:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = z_0\}$$

esto se puede parametrizar en coordenadas cilíndricas vía:

$$\vec{\sigma}(\rho, \theta) = \rho\hat{\rho} + z_0\hat{k}, \quad \rho \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

de donde se deduce que:

$$\partial_\rho \vec{\sigma} = \partial_\rho(\rho\hat{\rho} + z_0\hat{k}) = \hat{\rho}$$
$$\partial_\theta \vec{\sigma} = \partial_\theta(\rho\hat{\rho} + z_0\hat{k}) = \rho\hat{\theta}$$

pues en S_1 se tiene que $\hat{n} = \hat{\rho}$, y por lo tanto:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \hat{\rho} \times \rho\hat{\theta} = \rho\hat{k}$$

por lo tanto $\hat{n} = \hat{k}$ en S_2, lo cual es natural, pues S_2 es la tapa superior del cilindro, y la orientación dada por Γ implica el uso de la normal exterior para el cálculo del flujo.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2x - 3x^2)\hat{k} \cdot \hat{k} \rho d\theta d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho\cos(\theta) - 3\rho^2\cos^2(\theta))\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\rho^2 \cos(\theta) d\rho d\theta - \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta \\
&= 0 - 3\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\
&= -3\int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot \pi \\
&= -\frac{3\pi}{4} \rho^4|_0^1 = -\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

La primera de las integrales es cero pues integramos coseno en un período. Se concluye finalmente que:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{3\pi}{4}$$