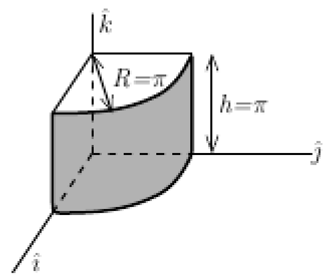
Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 13 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 2. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z \sin(y) + xy^2 z)\hat{\imath} + (e^x \cos(z) + x^2 yz)\hat{\jmath} + (x^2 e^y)\hat{k}$$

sobre el **manto** (parte sombreada) del cuarto de cilíndro de radio y altura π de la figura, con la normal orientada hacia el exterior.



Solución:
Queremos calcular $\Phi = \iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dA$, con $\hat{n}$ la normal exterior respecto al cilíndro asociado a este manto M. Para usar el Teorema de la divergencia es necesario cerrar la superficie (de modo que la superficie sobre la cual aplicamos el teorema sea el borde geométrico de un abierto Ω, por ejemplo: $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro.)
Así pues, en el caso que $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro se tiene que: $\partial\Omega = M \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$. Donde T_1 es la tapa ubicada en el plano XZ, T_2 es la tapa ubicada en el plano YZ, T_3 es la tapa ubicada en el plano XY y T_4 es la tapa paralela al eje XY, ubicada a altura $z = \pi$.
Notemos que $\vec{F}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ y las superficies involucradas son todas regulares, luego $\partial\Omega$ es regular a trozos. Por lo tanto, en virtud del Teorema de la divergencia:

$$\iint_{M \cup T_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_\Omega div\vec{F} \cdot dV$$

Se tiene que:

$$div\vec{F} = \partial_x(e^z \sin(y) + xy^2 z) + \partial_y(e^x \cos(z) + x^2 yz) + \partial_z(x^2 e^y) = y^2 z + x^2 z = (x^2 + y^2)z$$

Luego, notando que $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro $= \{(\rho, \theta, z) : \ \rho \in [0, \pi], z \in [0, \pi], \theta \in [0, \pi/2]\}$:

$$\iiint_\Omega div\vec{F} \cdot dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \rho^2 z \cdot \rho d\rho dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \rho^3 z d\rho dz d\theta = \frac{\pi^7}{16}$$

Por otro lado:

$$\iint_{M \cup U_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\Phi} + \sum_{i=1}^{4} \iint_{T_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi^7}{16}$$

Así:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - \left(\sum_{i=1}^{4} \iint_{T_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right)$$

Notemos que T_3 es la misma superficie que T_4, excepto por su altura, T_3 está en $z = 0$ y T_4 en $z = \pi$, por otro lado:

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = -x^2 e^y \text{ en } T_3 \text{ y } \vec{F} \cdot \hat{n} = x^2 e^y \text{ en } T_4$$

esto debido a que se debe usar la normal exterior en las tapas, en T_3 es $-\hat{k}$ y en T_4 es $\hat{k}$. Notemos que integramos functiones que NO dependen de z en superficies que solo difieren en su parametrización por el factor z. Por lo tanto, se tiene que:

$$\iint_{T_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{T_4} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

y por lo tanto:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - \iint_{T_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{T_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Así que basta calcular explícitamente solo estos dos flujos.
Veamos el primero:
Debemos parametrizar la tapa T_1 que es un cuadrado de lado π en el plano XZ (ver la figura), la parametrización es:

$$\sigma(x,z) = (x, 0, z), \quad x \in [0, \pi], \; z \in [0, \pi]$$

y naturalmente la normal exterior en esta cara es:

$$\hat{n} = (0, -1, 0)$$

Luego:

$$\iint_{T_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^\pi (0, e^x \cos(z) + 0, x^2 e^0) \cdot (0, -1, 0) dxdz = \int_0^\pi \int_0^\pi -e^x \cos(z) dxdz = -(e^\pi - 1) \int_0^\pi \cos(z) dz = 0$$

Por lo tanto el flujo de $\vec{F}$ a través de T_1 es 0.
Calculemos finalmente el flujo de $\vec{F}$ a través de T_2:
Ahora debemos parametrizar la tapa T_2 que es un cuadrado de lado π en el plano YZ (ver la figura), la parametrización es:

$$\sigma(y,z) = (0, y, z), \quad y \in [0, \pi], \; z \in [0, \pi]$$

y en este caso, la normal exterior es:

$$\hat{n} = (-1, 0, 0)$$

Luego:

$$\iint_{T_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^\pi (e^z \sin(y), \cos(z), 0) \cdot (-1, 0, 0) dydz = \int_0^\pi \int_0^\pi -e^z \sin(y) dydz = -2(e^\pi - 1)$$

Por lo tanto el flujo de $\vec{F}$ a través de T_1 es $-2(e^\pi - 1)$.
Conclusión final:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - 0 - (-2(e^\pi - 1)) = \frac{\pi^7}{16} + 2(e^\pi - 1)$$