Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 13 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

(a) Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos campos vectoriales dados por $\vec{F}(x,y,z) = (xz-y)\,\hat{\imath} + (x^2y+z^3)\,\hat{\jmath} + (3xz^2-xy)\,\hat{k}$ y $\vec{G}(x,y,z) = 2xe^{-y}\,\hat{\imath} + (\cos(z) - x^2e^{-y})\,\hat{\jmath} - y\sin(z)\,\hat{k}$. Sea Γ la curva cerrada, correspondiente al rectángulo recorrido según el orden de los vértices $ABCD$ con $A=(0,0,0)$, $B=(0,0,1)$, $C=(2,0,1)$ y $D=(2,0,0)$.

- **(i)** Demuestre que $\vec{F}$ no es conservativo, y determine el valor de $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dr}$
- **(ii)** Demuestre que $\vec{G}$ es conservativo encontrando un potencial escalar ϕ tal que $\nabla\phi = \vec{G}$ y determine el valor de $\oint_\Gamma \vec{G}\cdot\vec{dr}$

(b) Considere el campo $\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$

- **(i)** Escriba $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas.
  Indicación: Recuerde que $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$ y que $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$
- **(ii)** Calcule $div(\vec{F})$.
- **(iii)** Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de cualquier esfera de radio $R>0$, orientada según la normal **interior** a esta, que no intersecte al eje OZ.

Solución:

(a) Notemos que para verificar que $\vec{F}$ no es conservativo basta probar que $rot(\vec{F}) = 0$, veamos que esto efectivamente es así:

$$\begin{aligned} rot(\vec{F}) &= \hat{\imath}(\partial_y(3xz^2-xy) - \partial_z(x^2y+z^3)) + \hat{\jmath}(\partial_x(3xz^2-xy) - \partial_z(xz-y)) + \hat{k}(\partial_x(x^2y+z^3) - \partial_y(xz-y)) \\ &= \hat{\imath}(-x-3z^2) + \hat{\jmath}(-x+3z^2-y) + \hat{k}(2xy+1) \neq \vec{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\vec{F}$ no es conservativo.

Para el cálculo de la integral de línea, hay dos opciones: Hacerla por definición o utilizar el Teorema de Stokes (esto es posible pues la integral es en un camino cerrado), aquí detallaremos el desarrollo usando el Teorema de Stokes:
Por un lado es claro que la curva es regular a trozos (son segmentos de rectas), además el campo es de clase $\mathcal{C}^\infty$, notemos que la superficie S tal que $\partial S = \Gamma$ está dada por:

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 2,\ 0\le z\le 1,\ y=0\}$$

que es una superficie regular, una parametrización de esta superficie es:

$$\sigma(x,z) = (x,0,z) \quad x\in[0,2],\ z\in[0,1]$$

de donde se deduce que $dA = dxdz$ y $\hat{n} = (0,1,0)$ (dada la orientación de Γ). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S rot\vec{F}\cdot\hat{n}dA = \iint_S \vec{F}\cdot(0,1,0)dA \\ &= \int_0^1\int_0^2(-x+3z^2-0)dxdz = \int_0^1\int_0^2(-x+3z^2)dxdz = 0 \end{aligned}$$

Hay que notar que esto no contradice el hecho de que $\vec{F}$ no sea conservativo, pues este es el resultado en una curva cerrada particular, el resultado conocido es que un campo es conservativo si integra 0 en **cualquier** curva cerrada.

Para ver que $\vec{G}$ es conservativo basta determinar explícitamente el campo escalar ϕ tal que $\vec{G} = \nabla\phi$. Notemos que se tiene:

$$\partial_x\phi = 2xe^{-y} \Rightarrow \phi(x,y,z) = h_1(y,z) + \int 2xe^{-y}dx = h_1(y,z) + x^2e^{-y}$$

$$\partial_y\phi = \cos(z) - x^2e^{-y} \Rightarrow \phi(x,y,z) = h_2(x,z) + \int \cos(z)dy - \int x^2e^{-y}dy = h_2(x,z) + y\cos(z) + x^2e^{-y}$$

$$\partial_z\phi = -y\sin(z) \Rightarrow \phi(x,y,z) = h_3(x,y) - \int y\sin(z)dz = h_3(x,y) + y\cos(z)$$

de estos cálculos se deduce que:

$$\phi(x,y,z) = x^2e^{-y} + y\cos(z) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Se verifica directamente que $\nabla\phi = \vec{G}$.

Finalmente, como $\vec{G}$ es conservativo se tiene que:

$$\oint_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = 0$$

(b) Tenemos: $\vec{F} = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$, luego, en cilíndricas se tiene $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{\rho^2}[(\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\cdot\rho\cdot\arctan z^2, \rho\sin\theta + \rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\arctan z^2, z\rho^2)] \\
&= \frac{1}{\rho^2}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0) + \frac{1}{\rho^2}(-\rho^2\sin\theta\cdot\arctan z^2, \rho^2\cos\theta\cdot\arctan z^2, 0) + \frac{1}{\rho^2}(0,0,z\rho^2) \\
&= \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho\underbrace{(\cos\theta,\sin\theta,0)}_{\hat{\rho}} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho^2\arctan z^2\underbrace{(-\sin\theta,\cos\theta,0)}_{\hat{\theta}} + \frac{1}{\rho^2}z\rho^2\underbrace{(0,0,1)}_{\hat{k}} \\
&= \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan z^2\hat{\theta} + z\hat{k}
\end{aligned}$$

Notar que esta expresión está bien definida (y de hecho es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje Z.

Calculemos ahora la divergencia de $\vec{F}$:
Recordemos que en coordenadas cilíndricas:

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}[\partial_\rho(F_\rho\cdot\rho) + \partial_\theta(F_\theta) + \partial_z(F_z\cdot\rho)]$$

En nuestro caso: $F_\rho = \frac{1}{\rho},\ F_\theta = \arctan z^2,\ F_z = z$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
div(\vec{F}) &= \frac{1}{\rho}[\partial_\rho(\frac{1}{\rho}\cdot\rho) + \partial_\theta(\arctan z^2) + \partial_z(z\cdot\rho)] \\
&= \frac{1}{\rho}[0+0+\rho] = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que, en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje Z:

$$div(\vec{F}) = 1$$

Finalmente nos piden calcular:

$$\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F}\cdot\hat{n}dA$$

donde $S(\vec{x}_0,R)$ es la esfera de centro $\vec{x}_0$ y radio $R > 0$, tal que **no** intersecta al eje OZ, orientado según la normal **interior**.
Notemos que como la esfera no intersecta al eje OZ, entonces $\vec{F}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un volúmen que contiene a esta superficie (por ejemplo la bola abierta $B(x_0, R+\epsilon)$ con ϵ suficientemente pequeño tal que no cruce

al eje OZ.). Luego, es posible utilizar el Teorema de la divergencia (con cuidado de notar que el cálculo de este teorema nos dará el flujo orientado con normal exterior) para calcular este flujo, por el Teorema:

$$\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F} \cdot \hat{n}_{ext} dA = \iiint_{B(\vec{x}_0,R)} div\vec{F} dV = \iiint_{B(\vec{x}_0,R)} 1 dV = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Dado que este cálculo es con la normal exterior, entonces se concluye que:

$$\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F} \cdot \hat{n}_{int} dA = -\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F} \cdot \hat{n}_{ext} dA = -\frac{4}{3}\pi R^3$$