Auxiliar 7 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 04 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca R.
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Determine el dominio de convergencia de las siguientes series:

$$\textbf{a)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \textbf{b)}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$$
$$\textbf{c)}\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-i)^{n!} \qquad \textbf{d)}\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n$$

Pregunta 2. Considere una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Determine el radio de convergencia R y pruebe que si $|z| = R$ entonces la serie diverge si:
$a_n = 2$ cuando n es par y $a_n = 1$ cuando n es impar.
Además pruebe que si $|z| < R$ entonces: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{2+z}{1-z^2}$
Indicación: Recuerde que si una serie es convergente, entonces la sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy.

Pregunta 3.

a) Sea $T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$, $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} k z^k$. Pruebe la siguiente identidad:
$$S_n(z) = \frac{T_n(z) - n z^{n+1}}{1-z}$$
Calcule el radio de convergencia de $S(z) = \sum_{n \geq 0} n z^n$ y deduzca su valor explícitamente.

b) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f''(z) = 2f(z) + 1$ con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. Encuentre la serie de potencia de f en torno a 0 y determine su radio de convergencia.

Pregunta 4. Dado un entero k considere:
$$J_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k}$$
Pruebe que se tiene:
$$z^2 J_k''(z) + z J_k'(z) + (z^2 - k^2) J_k(z) = 0$$