Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 1.

(a) (3 puntos) Una función $u(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ se dice armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dada u armónica en todo el plano, se define

$$v(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)\,ds.$$

Pruebe que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.
Recuerdo de CVV: La derivada de

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)dt \quad \text{es} \quad F'(x) = g(x,b(x))\,b'(x) - g(x,a(x))\,a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

(b) (3 puntos) Considere la función $u(x,y) = x\sin(x)\cosh(y) - y\cos(x)\sinh(y)$. Determine $v(x,y)$ tal que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Pregunta 2.

(a) (4 puntos) Encuentre los discos de convergencia de las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n))^n (z+1)^{n^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{(\ln(n))^2} z^n$

(b) (2 puntos) Sea $f(z) = \frac{z}{z+1}$, encuentre la expansión en serie de $f(z)$ en torno al punto $z_0 = 0$ y calcule su radio de convergencia.

Pregunta 3. Considere el polinomio $p(z) = (z + (1+i))\,(z + (1-i))$. Se desea calcular

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)}\,dt.$$

(i) (1 punto) Compruebe que $\displaystyle\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z+(1+i)} + \frac{1}{z+(1-i)}.$

(ii) (2 puntos) Para la curva Γ_R formada por los dos arcos regulares, $L_R = [-iR, iR]$ y la semicircunferencia $S_R = \{z \mid |z| = R,\ Re(z) \leq 0\}$ (curvas que dependen de $R > 0$), muestre que

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = \ 4\pi i,$$

si R es suficientemente grande.

(iii) (2 puntos) Muestre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1+i)} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1-i)} = i\pi.$$

(iv) (1 punto) Usando los resultados anteriores, calcule

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)}\, dt.$$