Pauta Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 3. Considere el polinomio $p(z) = (z + (1+i))\,(z + (1-i))$. Se desea calcular

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)}\, dt.$$

(i) **(1 punto)** Compruebe que $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z+(1+i)} + \dfrac{1}{z+(1-i)}$.

(ii) **(2 puntos)** Para la curva Γ_R formada por los dos arcos regulares, $L_R = [-iR, iR]$ y la semicircunferencia $S_R = \{z \mid |z| = R,\ Re(z) \leq 0\}$ (curvas que dependen de $R > 0$), muestre que

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = \ 4\pi i,$$

si R es suficientemente grande.

(iii) **(2 puntos)** Muestre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1+i)} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1-i)} = i\pi.$$

(iv) **(1 punto)** Usando los resultados anteriores, calcule

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)}\, dt.$$

Solución: Por simplicidad notacional denotaremos a lo largo de esta pregunta $p_1 = -(1+i)$ y $p_2 = -(1-i)$, notar que en tal caso:

$$P(z) = (z-p_1)(z-p_2)$$

(i) Basta notar que $P'(z) = 1\cdot(z-p_2) + (z-p_1)\cdot 1 = (z-p_1) + (z-p_2)$ luego:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{(z-p_1)+(z-p_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{1}{z-p_1} + \frac{1}{z-p_2}$$

y se concluye lo pedido.

(ii) Notemos, de la parte anterior, que podemos escribir

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-p_1} + \frac{1}{z-p_2} = f_1(z) + f_2(z)$$

con $f_1 \in H(\mathbb{C}\setminus\{p_1\})$ y $f_2 \in H(\mathbb{C}\setminus\{p_2\})$. Así, si R es suficientemente grande (específicamente si $R > r = |p_1| = |p_2|$, pero basta decir que R debe ser suficientemente grande para encerrar a los puntos) se tiene que Γ_R encierra a p_1 y p_2, luego, en virtud del 'Teorema de la curva', se tiene que $\forall R > r$:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \oint_{\Gamma_R} f_1(z) + f_2(z) dz = \oint_{\Gamma_R} f_1(z)dz + \oint_{\Gamma_R} f_2(z)dz$$
$$= \oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} f_1(z)dz + \oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} f_2(z)dz$$

siempre que $\varepsilon > 0$ sea suficiemente pequeño tal que $D(p_1,\varepsilon)\cup D(p_2,\varepsilon) \subset$ Región encerrada por Γ_R
Finalmente, como estas últimas integrales son sobre circunferencias, se puede explicitar su valor en virtud de la fórmula integral de Cauchy, reconociendo en cada integral $f(z) = 1 \in H(\mathbb{C})$, y por lo tanto:

$$\oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} f_1(z)dz = \oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} \frac{1}{z-p_1}dz = \oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-p_1}dz = 2\pi i\cdot f(p_1) = 2\pi i$$

análogamente:

$$\oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} f_2(z)dz = \oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} \frac{1}{z-p_2}dz = \oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-p_2}dz = 2\pi i \cdot f(p_2) = 2\pi i$$

y por lo tanto:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

Observación: Es posible también que hayan identificado:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z-p_1}dz + \oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z-p_2}dz = 2\pi i Ind_{\Gamma_R}(p_1) + 2\pi i Ind_{\Gamma_R}(p_1)$$

y luego, si R es suficientemente grande, entonces $Ind_{\Gamma_R}(p_1) = Ind_{\Gamma_R}(p_1) = 1$ de donde se concluye.

(iii) Veamos el primer límite, es decir, probemos que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} = \pi i$$

Dado $R > r$, explicitemos la integral, notar que una parametrización para S_R es: $\gamma(t) = Re^{it}$ con $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$, luego $\gamma'(t) = iRe^{it}$, y por lo tanto:

$$\int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}-p_1}dt$$

la idea será reacomodar los términos de la integral de modo de que obtengamos la cantidad $i\pi$ y otra integral, la cual probaremos que converge a 0 si $R \to \infty$, para ello, notemos que:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}-p_1}dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}-ip_1+ip_1}{Re^{it}-p_1}dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}-ip_1}{Re^{it}-p_1} + \frac{ip_1}{Re^{it}-p_1}dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} i + \frac{ip_1}{Re^{it}-p_1}dt = i\pi + i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt$$

así, basta probar que $\lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt = 0$ para concluir.
Para probar esto, notemos primero que:

$$\left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt \right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|p_1|}{|Re^{it}-p_1|}dt$$

ahora, recordando que de la desigualdad triangular se puede probar que:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

entonces se tiene que:

$$||Re^{it}| - |p_1|| \leq |Re^{it} - p_1| \Rightarrow \frac{1}{|Re^{it}-p_1|} \leq \frac{1}{||Re^{it}| - |p_1||} = \frac{1}{R-|p_1|}$$

esto último pues $R > r$, y luego:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|p_1|}{|Re^{it}-p_1|}dt \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|p_1|}{R-|p_1|}dt = \frac{|p_1|}{R-|p_1|} \cdot \pi$$

pues la cantidad $\frac{|p_1|}{R-|p_1|}$ no depende de t, por lo tanto tenemos:

$$\left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt \right| \leq \frac{|p_1|}{R-|p_1|} \cdot \pi = \frac{\sqrt{2}}{R-\sqrt{2}}$$

luego, como $\lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{R-\sqrt{2}} = 0$ se deduce:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it} - p_1} dt \right| = 0$$

y por lo tanto:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z - p_1} = i\pi + \lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it} - p_1} dt = i\pi + 0 = i\pi$$

que era lo deseado. Notemos que para p_2 el procedimiento es análogo, pues solo requería que p sea constante. Por lo tanto:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z - p_1} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z - p_2} = i\pi$$

(iv) Queremos calcular

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P'(it)}{P(it)} dt$$

Notemos que en **(ii)** probamos que, para R suficientemente grande se tiene:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 4\pi i = \int_{L_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz + \int_{S_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

pero, notemos que una parametrización de L_R es $\gamma(t) = it$ con $t \in [-R, R]$, luego $\gamma'(t) = i$, y por lo tanto:

$$\int_{L_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} i dt = i \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} dt$$

por otro lado, en **(iii)** vimos que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z - p_1} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z - p_2} = i\pi$$

así, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 4\pi i &= \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \\ &= \lim_{R\to\infty} i \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} dt + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z - p_1} + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z - p_2} \\ &= \lim_{R\to\infty} i \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} dt + 2\pi i + 2\pi i = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P'(it)}{P(it)} dt + 4\pi i \end{aligned}$$

de donde despejando, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P'(it)}{P(it)} dt = 1$$

que es lo buscado.

Asignación de Puntajes: Para **(i)** 1 punto por el cálculo (que es directo)
(ii) Decir que para R grande ambas singularidades quedan enceradas por la curva tiene 1 punto
Aplicar la Fórmula integral de Cauchy para cada integral y en cada caso obtener $2\pi i$ tiene 0.5 + 0.5 puntos
(iii) Parametrizar la semicircunferencia (con t de $\pi/2$ a $3\pi/2$ por ejemplo) y escribir claramente lo que se debe probar que converge a πi tiene 0.5 puntos
Argumentar que el integrando converge a πi si $R \to \infty$ sin mayor detalle tiene solo 0.5 puntos (por ejemplo, se divide numerador y denominador por Re^{it})
Probar que converge, acotando las integrales y viendo en detalle la convergencia tiene 1.5 puntos
(iv) Escribir la ecuación que se cumple para cada R (grande) parametrizando el tramo L_R tiene 0.5

puntos
Finalmente, tomar límites, usando los resultados previos y obtener lo pedido tiene los 0.5 puntos restantes.