Pauta Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 1.

(a) **(3 puntos)** Una función $u(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ se dice armónica si
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$
Dada u armónica en todo el plano, se define
$$v(x,y)=\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt-\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)\,ds.$$
Pruebe que $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.
Recuerdo de CVV: La derivada de
$$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)dt \quad \text{es} \quad F'(x)=g(x,b(x))\,b'(x)-g(x,a(x))\,a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$
do $\mathbb{C}$.

Solución: Notemos que como u es armónica, entonces $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, más aun:
$$v(x,y)=\int_0^y \partial_x u(x,t)dt-\int_0^x \partial_y u(s,0)ds$$
es, al menos, diferenciable gracias al Teorema fundamental del cálculo. Luego, si $\partial_x v$ y $\partial_y v$ son continuas (cosa que aun no podemos asegurar), entonces se tendrá la equivalencia siguiente:
$$f\in H(\mathbb{C})\Leftrightarrow u,v \text{ satisfacen las condiciones de CR } \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$
Hagamos el cálculo de las derivadas de v:
$$\partial_y v(x,y)=\partial_y\left(\int_0^y \partial_x u(x,t)dt\right)-\underbrace{\partial_y\left(\int_0^x \partial_y u(s,0)ds\right)}_{0}=\partial_x u(x,y)$$
gracias a la regla de derivación de CVV, el segundo término es 0 pues no depende de y. y se tiene entonces que:
$$\partial_y v(x,y)=\partial_x u(x,y)$$
Notar que esto en particular nos dice que $\partial_y v(x,y)$ es continua.

Hagamos ahora el cálculo de $\partial_x v(x,y)$
$$\partial_x v(x,y)=\partial_x\left(\int_0^y \partial_x u(x,t)dt\right)-\partial_x\left(\int_0^x \partial_y u(s,0)ds\right)=\int_0^y \partial_{xx}u(x,t)dt-\partial_y u(x,0)$$
Como u es armónica, entonces $\partial_{xx}u(x,y)=-\partial_{yy}u(x,y),\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, luego:
$$\partial_x v(x,y)=-\int_0^y \partial_{yy}u(x,t)dt-\partial_y u(x,0)=-\int_0^y \partial_y(\partial_y u(x,t))dt-\partial_y u(x,0)$$
$$=-\partial_y u(x,y)+\partial_y u(x,0)-\partial_y u(x,0)=-\partial_y u(x,y)$$
en esto último se ha usado el Teorema Fundamental del Cálculo notando que estamos integrando (en y) la derivada (en y) de la función $\partial_y u(x,y)$, y entonces se tiene que:
$$-\partial_x v(x,y)=\partial_y u(x,y)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

lo que en particular nos dice que $\partial_x v(x,y)$ es continua.
Así, hemos probado que u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, como además u y v son de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$, se concluye que $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

(b) (3 puntos) Considere la función $u(x,y)=x\sin(x)\cosh(y)-y\cos(x)\sinh(y)$. Determine $v(x,y)$ tal que la función $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Solución: Es claro que $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ pues es composición de funciones de esta clase. Así, debemos primero ver que u es una función armónica, y en función de esto podremos usar la parte anterior para calcular explícitamente $v(x,y)$ tal que $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ resulte holomorfa en $\mathbb{C}$.
Veamos pues, que u es armónica, calculemos sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= \sin x\cosh y + x\cos x\cosh y + y\sin x\sinh y\\
\partial_y u &= x\sin x\sinh y - \cos x\sinh y - y\cos x\cosh y\\
\partial_{xx} u &= \cos x\cosh y + \cos x\cosh y - x\sin x\cosh y + y\cos x\sinh y\\
\partial_{yy} y &= x\sin x\cosh y - \cos x\cosh y - \cos x\cosh y - y\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

Luego, se tiene:

$$\partial_{xx}u+\partial_{yy}u=0$$

por lo tanto u es efectivamente armónica. Calculemos ahora $v(x,y)$ dada por la fórmula de la parte anterior, para ello notemos que $\partial_x u(x,y)$ ya lo tenemos calculado, y $\partial_y u(x,y)$ debe ser evaluado en $y=0$, lo que nos da:

$$\partial_y u(x,0)=0$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= \int_0^y \partial_x u(x,t)dt - \int_0^x \partial_y u(s,0)ds = \int_0^y \sin x\cosh t + x\cos x\cosh t + t\sin x\sinh t dt - 0\\
&= (\sin x + x\cos x)\int_0^y \cosh t dt + \sin x\int_0^y t\sinh t dt\\
&= (\sin x + x\cos x)\sinh y + \sin x\int_0^y t\sinh t dt
\end{aligned}$$

para calcular $\int_0^y t\sinh t dt$ se integra por partes como sigue:

$$\int_0^y t\sinh t dt = t\cosh t|_0^y - \int_0^y 1\cdot\cosh t dt = y\cosh y - \int_0^y \cosh t dt = y\cosh y - \sinh y$$

de donde se concluye finalmente que:

$$v(x,y)=(\sin x + x\cos x)\sinh y + \sin x(y\cosh y - \sinh y) = x\cos x\sinh y + y\sin x\cosh y$$

Asignación de Puntajes:
(a) Se deben probar ambas ecuaciones de CR.
Para el cálculo de $\partial_y v$ es sencillo. Al aplicar la fórmula de la indicación de CVV, el segundo término muere pues no depende de y y el primero arroja inmediatamente $\partial_x u$ (1 punto)

Para el cálculo de $\partial_x v$:
(0.5 puntos) Aplicar fórmula de CVV (dejando $\int \partial_x x u(x,t)dt - \partial_y u(x,0)$)
(0.5 puntos) Aplicar u armónica y cambiar derivadas c/r a x por derivadas c/r a y.
(0.5 puntos) Aplicar TFC y llegar a la segunda condición de CR

Por último (0.5 puntos) Aplicar el resultado que dice: Si (i) CR se cumple en un dominio y (ii) u,v

son $\mathcal{C}^1$ o u, v tienen las derivadas parciales $\mathcal{C}^1$, entonces f holomorfa en el dominio (en este caso en todo $\mathbb{C}$) (Si solo justifican/mencionan una de estas 2 condiciones, el puntaje solo es 0.3 puntos)

(b) El cálculo de las derivadas de u tiene 1 punto. Deducir que u es armónica tiene 0.5 puntos.
El cálculo explícito de $v(x, y)$ posee los 1.5 puntos restantes (Si se calcula la primitiva sin evaluar $\partial_y u(x, y)$ en $y = 0$ dar solo 0.5).