Auxiliar 10 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 25 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) La función $f(z) = \dfrac{(z^2-4)(z-1)^4}{(\sin(\pi z))^4}$ tiene singularidades en los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Clasifique todas las singularidades de $f(z)$, distinguiendo si se trata de singularidades evitables o polos, e indicando el orden cuando corresponda. No se pide que calcule los residuos.

b) Calcule $\displaystyle\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$, donde la curva se recorre en sentido antihorario.

Pregunta 2.

a) Pruebe, usando las desigualdades de Cauchy, que para $f \in H(\mathbb{C})$ se tiene la siguiente equivalencia:

$$f \text{ es polinomio de grado } k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(z)| \leq a + b|z|^k$$

b) Pruebe que si $f \in H(\mathbb{C})$ no es constante, entonces el conjunto $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

c) Sean $f, g \in H(\mathbb{C})$ tal que $\forall z \in \mathbb{C} : Re(f) \leq kRe(g)$ para alguna constante real k independiente de z. Pruebe que existen $a, b \in$ tal que: $f(z) = ag(z) + b$.

Pregunta 3.

a) Demuestre, usando la fórmula integral de Cauchy para derivadas y usando el Teorema de los Residuos, que para todo par de enteros $n > k \geq 1$:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

Con $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, recorrido en sentido antihorario.

b) A partir de lo anterior, demuestre que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

Pregunta 4.

a) Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no nula y $p \in \mathbb{C}$ una raíz de f, es decir $f(p) = 0$. Pruebe que existen constantes $r > 0$ y $m \geq 1$, y una función $Q(z)$ holomorfa en $D(p, r)$ con $Q(p) \neq 0$, tales que para todo $z \in D(p, r)$, $f(z) = (z-p)^m Q(z)$. Deduzca que p es un polo simple de $g(z) = f'(z)/f(z)$ y que $Res(g; p) = m$.

b) Sea $P(z)$ un polinomio de grado n. Una raíz $\lambda \in \mathbb{C}$ de $P(z)$ se dice **estable** si su parte real es estrictamente negativa, i.e.: $Re(\lambda) < 0$. Suponiendo que el polinomio no tiene raíces imaginarias puras, i.e. $P(iy) \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, pruebe que:

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{P'(iy)}{P(iy)} dy = \text{número total de raíces estables de } P(z)$$

donde en este número se incluye la multiplicidad de las raíces.

Pregunta 5. Demuestre que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \ln 2$$

Para ello considere la función $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$ e integre en un contorno adecuado.