Auxiliar 12 - CAA - 2012/2.

P1) Consideremos $f(x) = \cos x \quad x \in [0, \pi]$.

Queremos la serie de senos de esta función

En general, si $f : (0, l) \to \mathbb{R}$, entonces su serie de senos es de la forma:

$$S_f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{con} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

La razón de esto es que "por debajo" estamos considerando la ext. impar de f: $\hat{f} : (-l, +l) \to \mathbb{R}$ $\left(\text{osea } \hat{f}(x) = -f(x) \text{ si } x \in (-l, 0) \wedge \hat{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in (0, l) \right)$

y, a esta función se le determina su serie de Fourier de "forma clásica"

Notar que, como $\hat{f}$ es impar $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

$$\therefore \ S_{\hat{f}}(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad y \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \underbrace{\underbrace{\hat{f}(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\text{impar}}}_{\text{par}} dx$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \underbrace{\hat{f}(x)}_{= f(x) \text{ en } (0,l)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

y finalmente como $\hat{f} = f$ en $(0, l) \Rightarrow S_{\hat{f}} = S_f$ en $(0, l)$.

En nuestro caso:

$$\underset{\uparrow \, l = \pi}{b_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

Para calcular esta integral notemos que:

$$\operatorname{sen}(m+n) = \operatorname{sen} m \cos n + \operatorname{sen} n \cos m$$
$$\operatorname{sen}(m-n) = \operatorname{sen} m \cos n - \operatorname{sen} n \cos m$$
$$\therefore \quad \operatorname{sen} m \cdot \cos n = \frac{\operatorname{sen}(n+m) + \operatorname{sen}(m-n)}{2} \qquad \forall m, n$$

Así: $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(\underset{\substack{\uparrow \\ 1\cdot x}}{x}) \operatorname{sen}(nx)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}((1+n)x) + \operatorname{sen}((n-1)x)}{2}\,dx$

$$= -\frac{\cos((1+n)x)}{2(1+n)} - \frac{\cos((n-1)x)}{2(n-1)}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{\cos((n+1)\pi)}{2(n+1)} - \frac{\cos((n-1)\pi)}{2(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\Big(1-\cos((n+1)\pi)\Big) + \frac{1}{2(n-1)}\Big(1-\cos((n-1)\pi)\Big)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n-1} & n \text{ par},\ n\geq 2 \\ 0 & n \text{ impar},\ n\geq 2 \end{cases}$$

Para $n=1$: $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\operatorname{sen}(x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{periodo!}}}{=} 0$

$$\therefore\ b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n-1}\right) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{n-1+(n+1)}{n^2-1}\right) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{2n}{n^2-1}\right) & n \text{ par } n\geq 2 \\ 0 & \end{cases}$$

$$\therefore\ S_f(x) = \sum_{\substack{n \text{ par} \\ n\geq 2}} \frac{2}{\pi}\frac{2n}{n^2-1}\operatorname{sen}(nx) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\pi}\frac{2(2n)}{(2n)^2-1}\operatorname{sen}(2nx)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}\operatorname{sen}(2nx)$$

Como se deseaba.

Notar que como $f\in C^1((0,\pi)) \Rightarrow$ se puede asegurar que $f = S_f$ en $(0,\pi)$

ie. $\displaystyle\cos(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}\operatorname{sen}(2nx)$ en $(0,\pi)$

Cuando se desean probar identidades como la deseada al final hay que evaluar f y S_f en algún punto tq $f(x) = S_f(x)$, para esto simplemente hay que tener "buen ojo". En nuestro caso, nos piden una igualdad que al lado ~~derecho~~ izquierdo "el de f" contiene $\sqrt{2}$

Notando que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ el buen punto es $x = \frac{\pi}{4} \in (0,\pi)$

$$\therefore \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(2n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{pero: } \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 4k \\ 1 & n = 4k+1 \\ 0 & n = 4k+2 \\ -1 & n = 4k+3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^2-1} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + 0 + \frac{3}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}_{6^2} - 1} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1} + 0 + \frac{5}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}_{10^2} - 1} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{1}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \quad \frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{3}{6^2-1} + \frac{5}{10^2-1} - \frac{7}{14^2-1} + \cdots$$

P2) $f \in C^1$, 2π-per. tq $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$.

a) Pdq: $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi \sum_{n\geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$

Ind: Escribir $f^2 = f\cdot f$ aprop.

Sol: Notemos que $f \in C^1$ + f 2π-per $\Rightarrow$ f admite desarrollo en Serie de Fourier

Por prop. conocida (ver apunte si no), la serie parcial de Fourier (S_f^N) converge uniformemente a f (esto importa mucho, permite cambiar $\int$ con Σ)

Además, como $\int_0^{2\pi} f\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$\therefore$ $f(x) = S_f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ (Trabajamos en $(-\pi, \pi)$)

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot\Big(\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big)dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{conv} \\ \text{unif}}}{=} \sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx + b_n \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{periodicidad}}}{=} \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\pi}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}_{\pi a_n} + b_n \frac{\pi}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx}_{\pi b_n}$$

$= \pi \sum_{n\geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$ Lo que prueba la identidad.

b) Notar primero que $f \in C^1 \Rightarrow f'$ cont $\Rightarrow f'$ integ.

y como S_f^N conv unif $\Rightarrow$ la serie se puede derivar término a término y donde existe. conv unif ($\lim_{n\to\infty} (S_f^N)' = f'$)

$$\therefore\ f'(x) \overset{\substack{cu \\ \downarrow}}{=} \Big(\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big)' = \sum_{n\geq 1} \underbrace{(-n a_n)}_{\tilde{b}_n} \sin(nx) + \underbrace{(n b_n)}_{\tilde{a}_n} \cos(nx)$$

pero por la parte anterior:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)\,dx = \pi \sum_{n\geq 1} \tilde{a}_n^{\,2} + \tilde{b}_n^{\,2} = \pi \sum_{n\geq 1} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 = \pi \sum_{n\geq 1} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

y se concluye.

c) Veamos que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'^2(x)\,dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$

Esto es directo: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi \sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ n\geq 1}}{\leq} \pi \sum_{n\geq 1} n\,(a_n^2 + b_n^2) = \int_0^{2\pi} f'^2(x)\,dx$

Veamos finalmente que hay igualdad ssi $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

Notar que en tal caso: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2 = \sum_{n\geq 1} n\,(a_n^2 + b_n^2)$

Notar que esto implica que $a_n^2 + b_n^2 = 0 \quad \forall n \geq 2$

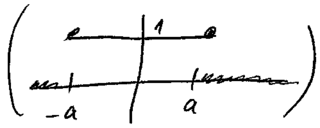
$\Rightarrow a_n = b_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

ie. $f(x) = a_1 \cos(x) + b_1 \operatorname{sen}(x)$

ie. igualdad $\Rightarrow f = a\cos x + b \operatorname{sen} x$.

que $f = a\cos(x) + b\operatorname{sen}(x) \Rightarrow$ igualdad, es obvio.

P3 a) $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ $\quad a>0$



Pdq $\mathcal{F}(f)(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\operatorname{sen}(as)}{s}$

Sol: $\mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-a,a]}(y) e^{-iys} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-iys} ds$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \cos(ys) - i \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(ys)}}^{\text{impar}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(as)}{s} = \sqrt{\frac{4}{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(as)}{s}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(as)}{s}$$

b) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$. $\quad$ Pdq $\mathcal{F}(f)(s) = \frac{-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s e^{-|s|}$.

Sol: Debemos calcular

$$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(1+y^2)^2} \cdot e^{-iys} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(1+y^2)^2} e^{iy(-s)} dy$$

Notar que si $s<0 \Rightarrow -s>0 \Rightarrow$ aplica el Teo. visto en clase!!

Osea, si $s<0$ tenemos una integral de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\alpha y} dy \quad \text{con } f \text{ tq } f = \frac{p}{q} \quad p, q \text{ polin con } gr(p) = 1, \; gr(q) = 4$$

Luego $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\alpha y} = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ polo} \\ \text{de } f \\ \operatorname{Im} p > 0}} \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), p)$

Osea, si $s<0$ podemos calcular explícitamente la TF.

¿Y si $s>0$? Basta aprovechar la fórmula de inv. $\hat{f}(-s) = \widehat{f(-x)}(s)$

Calculemos el caso $s<0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(1+y^2)^2} e^{i(-s)y}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{y}{(1+y^2)^2}}_{f} e^{i\alpha y}\,dy \quad , \quad \alpha>0$$

$$= 2\pi i \sum_{p \text{ polo de } f} \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), p)$$

¿Polos de f? $\rightarrow$ raíces de $1+y^2$
$\rightarrow 1+y^2=0 \Rightarrow y^2=-1$
$\Rightarrow y_1 = i,\ y_2=-i.$

Como $y=i$ es la única raíz tq $\operatorname{Im} y>0 \Rightarrow$ es la única considerada

i.e. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(1+y^2)^2} e^{i\alpha y}\,dy = 2\pi i \operatorname{Res}\left(e^{i\alpha z}\frac{z}{(1+z^2)^2}, i\right)$$

Por factorización de $(1+z^2)^2$ el orden del polo es 2, por lo tanto:

$$\operatorname{Res}\left(e^{i\alpha z}\frac{z}{(1+z^2)^2}, i\right) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-i)^2}\,\frac{e^{i\alpha z}\,z}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right)$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\alpha z}\,z}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{(e^{i\alpha z}+i\alpha e^{i\alpha z}\cdot z)(z+i)^2 - 2(z+i)e^{i\alpha z}\cdot z}{(z+i)^4}$$

$4i^2=(-4)$

$$= \frac{(e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha})(2i)^2 - 2(2i)e^{-\alpha}\cdot i}{(2i)^4} \qquad (2i)^2=-4$$

$$= \frac{-4e^{-\alpha}+4\alpha e^{-\alpha}+4e^{-\alpha}}{16} = \frac{\alpha}{4}e^{-\alpha}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(1+y^2)^2}e^{-isy}\,dy = 2\pi i\cdot\left(-\frac{s}{4}e^{s}\right) = -\frac{\pi}{2} i s e^{s}$$

$\Rightarrow$ si $s<0$: $$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(s) = \frac{-\pi}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{2}se^{s} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{i}{2}\,s e^{s}$$

conj da -!

Si $s>0$, como $\mathcal{F}(f)(s) = \overline{\mathcal{F}(f)(-s)}$ $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(s)\Big|_{s>0} = \overline{+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{i}{2}(+s)e^{-s}} = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,s e^{-s}$$

y se concluye.

c) $f(x) = \dfrac{a}{a^2+x^2} \Rightarrow \mathcal{F}(f)(s) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, e^{-a|s|}$

Caso $s<0$:

$$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+y^2} e^{-iys}\, dy$$

Por residuos, si $s<0$: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+y^2} e^{-iys}\, dy = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ polo } f \\ \text{Im } p>0}} \text{Res}\Big(e^{-izs} \overbrace{\frac{a}{a^2+z^2}}^{f}, p\Big)$$

¿Polos de f? raices de $a^2+z^2 \Rightarrow z^2 = -a^2 \Rightarrow z = -ai, ai$

Sup. que $a>0 \Rightarrow$ el polo a consid. es $z = ai$, es simple (Factor. polin).

Luego: $$\text{Res}\Big(e^{-izs}\frac{a}{a^2+z^2}, ai\Big) = \lim_{z\to ai} \cancel{(z-ai)}\, e^{-izs} \frac{a}{\cancel{(z-ai)}(z+ai)}$$
$$= \frac{e^{-i(ai)s}\, a}{2ai} = \frac{e^{as}}{2i}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+y^2} e^{-iys}\, dy = \frac{2\pi \cancel{i}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{as}}{2\cancel{i}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{as} = \mathcal{F}(f)(s) \qquad s<0.$$

Ahora, si $s>0$, notando que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Entonces: $\mathcal{F}(f)(s) = \overline{\mathcal{F}(f)(\underbrace{-s}_{<0})} = \overline{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{a(-s)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{a(-s)}$
$(s>0)$

$$\therefore \mathcal{F}(f)(s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{as} & s \leq 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-as} & s>0 \end{cases} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a|s|} \qquad \square$$

d) Como $\mathcal{F}(\cdot)$ es una función lineal, si derivamos respecto al parámetro a, se tiene que (Por Regla de Leibniz!)

$$\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{F}\Big(\frac{a}{a^2+x^2}\Big)(s) = \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+y^2} e^{-iys}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{a}{a^2+y^2}\Big) e^{-iys}\, dy$$
$$= \mathcal{F}\Big(\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{a}{a+x^2}\Big)\Big)(s) = \mathcal{F}\Big(\frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}\Big)(s)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2} \right)(s) = \frac{\partial}{\partial a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a|s|} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, |s|\, e^{-a|s|}$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2} \right)(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, |s|\, e^{-a|s|}$$

notando que $\dfrac{a^3-ax^2}{(x^2+a^2)^2} = (-a)\cdot \dfrac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}$ y por linealidad de $\mathcal{F}$

se tiene que:

$$(-a)\,\mathcal{F}\left(\frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2} \right) = (-a)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, |s|\, e^{-a|s|}$$

$$\underset{\text{linealidad}}{\parallel}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{a^3-ax^2}{(x^2+a^2)^2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a|s|\, e^{-a|s|}$$ como se deseaba.

P4 a) Plancherel: Por Teo. de convolución sabemos que: $\forall f, g$ integrables:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g}) = (f*g)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\hat{f}(s)\hat{g}(s)\,ds$$

Si evalúo en $x=0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\hat{g}(s)\,ds$$ si reemplazamos ~~[illegible]~~ $g(x)$ por $\overline{g}(-x)$ (se puede pues vale $\forall f, g$!)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\,\overline{g}(-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\,\widehat{\overline{g}(-x)}(s)\,ds$$, por inversión en el esp: $\widehat{\overline{g}(-x)}(s) = \hat{\overline{g}}(-s) \underset{\text{prop!}}{=} \overline{\hat{g}}(s)$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\,\overline{g}(-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\,\overline{\hat{g}}(s)\,ds$$

$$\underset{\text{cambio var}}{\parallel}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\overline{g}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\,\overline{\hat{g}}(s)\,ds$$ que era lo deseado.

b) Tomar $f=g$ y sale por def. c) si $\hat{f}=0 \overset{b)}{\Leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty}|f|^2dx = 0 \Rightarrow f\equiv 0$.

D