Auxiliar 12 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 15 de Noviembre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$ con $x \in (0, \pi)$. Pruebe que la serie de Fourier de senos de esta función es:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \left(\frac{n}{4n^2 - 1} \right) \sin(2nx)$$

¿Para que valores puede asegurar que $f(x) = S_f(x)$?
Deduzca finalmente que:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \cdots$$

Pregunta 2. Sea $f \in \mathcal{C}^1$, 2π-periódica, tal que: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

a) Pruebe la identidad de Parseval, esto es:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n\geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

Indicación: Escriba $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ de forma apropiada.

b) Deduzca que:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n\geq 1} n^2(a_n^2 + b_n^2)$$

c) Concluya la desigualdad de Wirtinger: Si f cumple las condiciones dadas en el enunciado, entonces:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$$

Además pruebe que la igualdad se obtiene si y solo si: $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

Pregunta 3. Pruebe que se tienen los siguientes resultados:

a) Si $f(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ con $a > 0$ Entonces $\mathcal{F}(f(x))(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(as)}{s}$

b) Si $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ Entonces $\mathcal{F}(f(x))(s) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|}$

c) Si $f(x) = \frac{a}{a^2+x^2}$ Entonces $\mathcal{F}(f(x))(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}$

d) Deduzca de c) que si $f(x) = \frac{a^3 - ax^2}{(a^2+x^2)^2}$ Entonces $\mathcal{F}(f(x))(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a|s|e^{-a|s|}$

Pregunta 4. Usando Transformada de Fourier pruebe las siguientes identidades:

a) Identidad de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{g(y)}dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\overline{\hat{g}}(s)ds$$

b) Deduzca de lo anterior la Identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

c) Pruebe que si $\hat{f}(s) = 0$ $\forall s$ entonces $f \equiv 0$

Suponga que todas las funciones consideradas decaen lo suficientemente rápido en infinito de modo que todas las integrales consideradas sean convergentes.