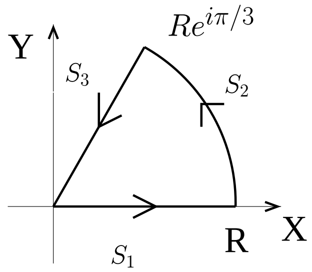
Control 3 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 22 de Noviembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

(a) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$. Para ello, utilize el Teorema de los Residuos para evaluar $\displaystyle\oint_{S_R} \frac{z}{1+z^6}dz$, donde $S_R = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (S_1 y S_3 son segmentos rectos que forman un ángulo de $\pi/3$ entre ellos, y S_2 es el arco de círculo de radio R, desde el complejo $(0, R)$ hasta $Re^{i\pi/3}$).

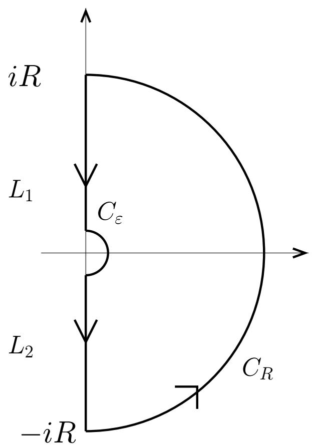


Nota: Las raíces de $1 + z^6$ *son* $z = e^{i(\pi/6)(2k+1)}$, $k = 0, \ldots, 5$.

(b) En este problema se deberá probar el siguiente resultado:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2+1}dx = \frac{\pi^3}{8}$$

Para ello, considere la función $f(z) = \frac{(Log(z))^2}{1-z^2}$ y el camino $K_{R,\epsilon} = C_R \cup L_1 \cup C_\epsilon \cup L_2$ dado en la figura



(i) Usando el Teorema de los Residuos, determine el valor de $\displaystyle\oint_{K_{R,\epsilon}} f(z)dz$ para $\epsilon < 1$ y $R > 1$.

(ii) Pruebe que:

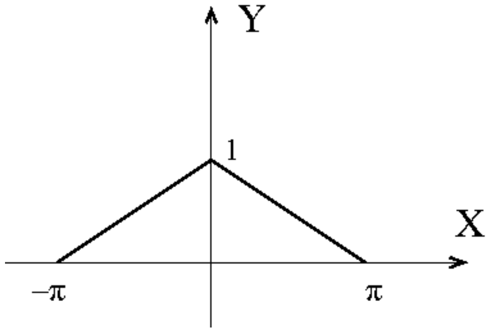
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)dz = 0$$

(iii) Pase al límite en las integrales $\int_{L_1} f(z)dz$ y $\int_{L_2} f(z)dz$ para $R \longrightarrow \infty$ y $\varepsilon \longrightarrow 0$, y deduzca el resultado solicitado.

<u>Indicaciones</u>:
(1) Recuerde que la determinación principal del logaritmo complejo se define como $Log(z) = \ln(|z|) + i\varphi$, en donde φ es el ángulo polar de z, considerado en $(-\pi, \pi]$.
(2) Puede usar que $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx = 0$ y que $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \pi/2$.

Pregunta 2.

(a) Encuentre la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función, afín por tramos, que se muestra en la figura:



(b) Considere la función $\hat{g} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\hat{g}(s,t) = e^{ist}e^{-ks^2t} \quad k > 0 \text{ constante}$$

muestre que $\hat{g}$ es la Transformada de Fourier de:

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-(x+t)^2/4kt} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

donde la transformada se entiende tomada respecto a la variable x.

Indicación: Puede usar sin demostración que la transformada de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2/2}$ es $s \mapsto e^{-s^2/2}$ y recuerde que:

$$\widehat{f(x+a)}(s) = e^{isa}\widehat{f}(s) \; a \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{|a|}\widehat{f\left(\frac{x}{a}\right)}(s) = \widehat{f}(as) \; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Pregunta 3.

Para resolver el problema no homogéneo

(EQ)	$\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3$	$\forall x \in [0,\pi] \;\; \forall t > 0$
(CB)	$u(0,t) = \pi \;, \quad u(\pi,t) = \pi(\pi+1)$	$\forall t > 0$
(CI)	$u(x,0) = \pi$	$\forall x \in [0,\pi]$

proceda como se indica a continuación:

(a) Encuentre la solución de

$$\phi''(x) = -3, \quad \phi(0) = \pi, \quad \phi(\pi) = \pi(\pi+1).$$

(b) Llamando u a la solución del problema no homogéneo inicial, definamos v por medio de la identidad $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$. Encuentre las ecuaciones que satisface v.

(c) Encuentre v usando el método de separación de variables.

(d) Encuentre explícitamente una expresión para u.

Puede utilizar las siguientes series o combinaciones lineales convenientes de ellas:

$$-\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n \sin(nx), \quad x(\pi - x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^{n+1})}{n^3}\sin(nx), \quad \text{para } x \in [0,\pi)$$