Auxiliar de Repaso Examen - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 29 de Noviembre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Usando el Teorema de Stokes, calcule:

$$\int_{\Gamma} (x^2+z)dx + (y^2+x)dy + (z^2+y)dz$$

donde Γ es la intersección del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ con el plano $2y + z = 3$, orientado positivamente.

b) Usando el Teorema de Gauss, calcule:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

donde $\vec{F}(x,y,z) = (y+z, x+z, z)$ y S es la parte de la superficie $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$ orientada hacia arriba.
Indicación: Recuerde que el volumen del elipsoide de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es $4\pi abc/3$, donde $a, b, c > 0$.

Pregunta 2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\vec{F} = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y)\hat{\jmath} = \frac{x+y}{x^2+y^2}\hat{\imath} - \frac{x-y}{x^2+y^2}\hat{\jmath}$$

Sea

$$I = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde Γ es una curva contenida en $\mathbb{R}^2$ simple, suave. cerrada y regular por trozos.
Determine el valor de I cuando Γ encierra al origen y cuando Γ no encierra al origen.

Pregunta 3. En esta pregunta utilizaremos Transformada de Fourier para resolver la Ecuación de ondas en una dimensión con condiciones iniciales:

Queremos determinar $u(x,t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tal que resuelva:

$$(EO) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Con $c > 0$, $u(\cdot, t)$, f y g integrables.
Para esto, considere los siguientes pasos:

a) Aplique Transformada de Fourier en la variable x en (EO), resuelva la EDO resultante.

b) Aplicando propiedades de la Transformada y Antitransformada de Fourier concluya la conocida fórmula de D'Alambert:

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy$$

Pregunta 4. Considere la ecuación

$$iu_t + u_{xx} = 0 \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

con condición inicial $u(x,0) = f(x)$, donde $i = \sqrt{-1}$ y $u(x,t) \in \mathbb{C}$. Suponemos que f y u decaen lo suficientemente rápido cuando $x \to \pm\infty$ de modo que $\hat{u}$ y $\hat{f}$ están bien definidas, donde $\hat{u}$ denota la transformada de Fourier con respecto a x.

a) Verifique que

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-i\xi^2 t}\hat{f}(\xi)$$

b) Obtenga explícitamente una función $G(x,t)$ de modo que la solución pueda expresarse como

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)f(y)dy$$

<u>Indicación</u>: Le puede ser útil recordar las integrales de Fresnel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(y^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(y^2)dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Pregunta 5. Las vibraciones $u = u(x,t)$ de una varilla infinita satisfacen la ecuación de elasticidad siguiente:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$$

Suponga que u es integrable respecto a x. Además suponga que inicialmente la varilla está en reposo, es decir: $u_t(x,0) = 0$ para todo x, en la posición $u(0,x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

a) Demuestre que la transformada de Fourier (con respecto a x) de la solución $u(x,t)$ viene dada por:

$$\hat{u}(t,s) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|}\cos(\alpha s^2 t)$$

<u>Indicación</u>: Recuerde que probamos en la Auxiliar 12 que: $\widehat{\dfrac{x}{(x^2+1)^2}} = -\dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} s e^{-|s|}$

b) Concluya que la solución corresponde a:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} s e^{-s}\sin(sx)\cos(\alpha s^2 t)ds$$