MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 9

Martes 16 de Octubre de 2012

P1.- a) Determine el radio de convergencia de la serie de $\frac{z}{\operatorname{senh}(z-1)}$ en torno a cero.

b) Encuentre la serie de $e^z \cos(z)$ en torno a cero.

P2.- Sea $u(x,y)$ una función armónica en $D = D(0,1)$.

a) ¿Es posible hallar $v(x,y)$ para $(x,y) \in D$ tal que la función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea holomorfa en D?
Ind: Estudie la función $g(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$.

b) Con $z = x+iy$, pruebe que $u(z)$ satisface la propiedad de la media, es decir,

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\ d\theta,$$

para todo $z_0 \in D$ y $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq D$.

P3.- Sea D un dominio acotado con frontera regular ∂D, y sea $z_0 \in D$. Usando la fórmula integral de Cauchy, pruebe que existe una constante C tal que

$$|f(z_0)| \leq C\ \sup\{|f(z)| : z \in \partial D\}$$

para toda función $f(z)$ holomorfa en un abierto que contenga a $D \cup \partial D$. Aplicando esta cota a f^n, muestre que C se puede elegir igual a 1. Deduzca que $|f|$ siempre alcanza su máximo en ∂D.

P4.- Para $a > 0$ calcule

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(x^2+a^2)} dx.$$

Teorema: Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y denotemos por P el conjunto de los polos de f. Supongamos que:
(a) f admite un número finito de polos reales simples, es decir, $\mathbb{R} \cap P = \{a_1, ..., a_m\}$ con a_j polo simple de f.
(b) f admite un número finito de polos en $Int(H)$, es decir, $Int(H) \cap P$ es un conjunto finito.
(c) Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \qquad \forall z \in H, |z| \geq M.$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{w \in Int(H)\cap P} \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, w) + \pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, a_j).$$

$(H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, $Int(H) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\})$