MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 11

Martes 6 de Noviembre de 2012

P1.- El objetivo de este problema es encontrar la solución general de la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{-x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Para esto,

a) Encuentre las soluciones del problema homogéneo.

b) Use la transformada de Fourier para encontrar una solución particular escrita como convolución de funciones conocidas.

c) Definamos

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

Demuestre que la solución general de la ecuación está dada por

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + \frac{e^{1-2x}}{3} F(x-1) + \frac{e^{x+\frac{1}{4}}}{3} F(-x-\tfrac{1}{2})$$

P2.- Resuelva el problema de Dirichlet en un disco plano

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & 0 < \rho < R,\ -\pi < \theta < \pi \\ u(R,\theta) & = & T & 0 < \theta < \pi \\ u(R,\theta) & = & -T & -\pi < \theta < 0 \end{array}$$

Usando la fórmula para el laplaciano en coordenadas polares $\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$, considere los siguientes pasos:

1. Usando separación de variables $u(\rho,\theta) = P(\rho)K(\theta)$ pruebe que $\frac{\rho}{P}\frac{d}{d\rho}(\rho P') = -\frac{K''}{K} = \lambda = cte.$
2. Imponga las condiciones de periodicidad $K(-\pi) = K(\pi)$ y $K'(-\pi) = K'(\pi)$, para encontrar una familia numerable de soluciones $K_k(\theta) = a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$(con $\lambda = k^2$).
3. Para $\lambda = k^2$ considere soluciones del tipo $P(\rho) = \rho^m$ e imponga la condición $|P(0)| < +\infty$ para encontrar el $P_k(\rho)$ correspondiente.
4. Imponga las condiciones de borde $u(R,\theta) = \pm T$ para encontrar u.

Propiedades:

1. $\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \hat{f}(s)$
2. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
3. Si $g(x) = f(ax)$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces
$$\hat{g}(s) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$
4. Si
$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
entonces
$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+is}$$
5. Si $g(x) = e^{-ax^2}$ con $a > 0$, entonces
$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-s^2/4a}$$