# Pauta P1 Control # 1

Cálculo Diferencial e Integral (MA1002) - Semestre Verano 2012

Profesor: Raúl Uribe S.

Prof. auxiliar: Franco Basso S.

Autor: Néstor Jofré M.

$\boxed{\text{P1.}}$ (i) (2.0 pts.) Sea $f$ una función continua sobre el intervalo cerrado $[-a,a]$ con $a>0$ y tal que $f(a)=f(-a)$. Demuestre que $\exists\, c\in[0,a]$ tal que $f(c)=f(c-a)$. **Ind:** Considere la función $g(x)=f(x)-f(x-a)$.

SOL: Por álgebra de funciones continuas, se tiene que $g$ es continua en $[0,a]$, pues $f$ lo es en $[-a,a]$. Además, $g(0)=f(0)-f(0-a)=f(0)-f(-a)=f(0)-\underbrace{f(a)}_{Hip.}$ y $g(a)=f(a)-f(a-a)=f(a)-f(0)$. Entonces, $g(0)g(a)=(f(0)-f(a))(f(a)-f(0))=-(f(a)-f(0))^2\le 0$. Por lo tanto, *por el TVI (versión Bolzano o teorema de las raíces),* se deduce que

$$(\exists\, c\in[0,a])\ \left\{g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)-f(c-a)=0 \Leftrightarrow f(c)=f(c-a)\right\} \blacksquare$$

Puntuación:

- 0.2 pts: Continuidad de $g$
- 1 pto.: Hipótesis restante para TVI
- 0.8 pts.: Uso apropiado del TVI y conclusiones

(ii) (2.0 pts.) Considere la función $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$ con $a<b$. Demostrar que el punto $c\in(a,b)$ del teorema de Rolle divide el intervalo $[a,b]$ en la razón $m:n$.

SOL: Por álgebra de funciones continuas, $f$ es continua en $[a,b]$. Además, $f(a)=\cancel{(a-a)}^m(a-b)^n=0$ y $f(b)=(b-a)^m\cancel{(b-b)}^n=0$. Entonces, $f(a)=f(b)$ y además como $f$ es derivable en $(a,b)$ por álgebra de funciones derivables. Entonces, *por el Teorema de Rolle,*

$$\begin{aligned}(\exists\, c\in(a,b))\ \Big\{f'(c)=0 \ &\Leftrightarrow\ m(c-a)^{m-1}(c-b)^n+n(c-a)^m(c-b)^{n-1}=0\\ &\Leftrightarrow\ \cancel{(c-a)^{m-1}(c-b)^{n-1}}\,(m(c-b)+n(c-a))=0\\ &\Leftrightarrow\ n(c-a)=m(b-c)\\ &\Leftrightarrow\ \frac{c-a}{b-c}=\frac{m}{n}\\ &\Leftrightarrow\ \frac{a-c}{c-b}=\frac{m}{n}\Big\} \blacksquare\end{aligned}$$

Puntuación:

- 0.8 pts.: Hipótesis para Teorema de Rolle

- 1.2 pts.: Uso apropiado del Teorema de Rolle y conclusiones

(iii) (2.0 pts.) Demostrar que la ecuación:

$$\frac{x^2+1}{x+2}+\frac{x^4+1}{x-3}=0$$

tiene por lo menos una raíz entre -2 y 3.

SOL: Definamos $f:\mathbb{R}\backslash\{-2,3\}\longrightarrow\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x^2+1}{x+2}+\frac{x^4+1}{x-3}$. Los extremos del intervalo $[-2,3]$ no son verificables para $f$, pues la función se indetermina en éstos. Entonces, basta con probar la existencia de raíces en un intervalo subconjunto de $[-2,3]$, como, por ejemplo, $[0,2]$ para demostrar la existencia en el intervalo mayor. En efecto, $f$ es continua en $[0,2]$, por álgebra de funciones continuas. Además, $f(0)=\frac{1}{6}$ y $f(2)=\frac{-63}{4}$, entonces $f(0)f(2)=\frac{-21}{8}\leq 0$. Entonces, *por el TVI (versión Bolzano o teorema de las raíces),* se tiene que:

$$(\exists\,\bar{x}\in[0,2])\ f(\bar{x})=0\Rightarrow(\exists\,\bar{x}\in(-2,3))\ \frac{\bar{x}^2+1}{\bar{x}+2}+\frac{\bar{x}^4+1}{\bar{x}-3}=0\,\blacksquare$$

Puntuación:

- 0.3 pts.: Planteamiento apropiado de función auxiliar
- 0.7 pts.: Hipótesis para TVI en subintervalo adecuado
- 1 pto.: Uso apropiado del TVI y conclusiones