Pauta P3 Control # 2

Cálculo Diferencial e Integral (MA1002) - Semestre Verano 2012

PROFESOR: Raúl Uribe S.
PROF. AUXILIAR: Franco Basso S.
AUTOR: Néstor Jofré M.

IMPORTANTE: La puntuación detallada de cada pregunta está sujeta al uso adecuado de teoremas y cambios de variable empleados en cada desarrollo, por lo tanto, es relativa y no existe una única solución para cada problema.

$\boxed{\text{P3.}}$ Calcular:

(i) (2.0 pts.) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$

Previamente, se tiene que $a \neq 0 \vee b \neq 0$, pues la primitiva a calcular no existiría ($a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x \neq 0$). Entonces, se proponen dos soluciones:

SOL. N° 1 (Elegante):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= \int \frac{1}{b^2}\frac{dx}{\left(\frac{a}{b}\right)^2\sin^2 x + \cos^2 x}\\
&= \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2 + 1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{b^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{\mathbf{b}}}{\mathbf{a}}\int \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2+1}\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\sec^2 x dx\right) \leftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Por el Teorema del}\\ \text{Cambio de variable con}\\ f(x) = \frac{1}{1+x^2};\\ u = \frac{a}{b}\tan x\\ \to du = \frac{a}{b}\sec^2 x dx\end{array}}\\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C \blacksquare
\end{aligned}$$

SOL. N° 2 (Por casos):

✓ Caso $|a| = |b| \neq 0$ ($\leftrightarrow a^2 = b^2 \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{a^2(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})}\\
&= \frac{1}{a^2}\int dx\\
&= \frac{x}{a^2} + C_0
\end{aligned}$$

- ✓ Caso $a = 0 \wedge b \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{b^2\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{b^2}\int \sec^2 dx \\ &= \frac{\tan x}{b^2} + C_1\end{aligned}$$

- ✓ Caso $b = 0 \wedge a \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{a^2\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \csc^2 dx \\ &= -\frac{\cot x}{a^2} + C_2\end{aligned}$$

- ✓ Caso $|a| \neq |b| \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$: Se puede hacer de la manera “elegante” o usando los cambios de variable $u = \tan x$ (óptimo) o, en su defecto, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (engorroso y lento).

(ii) (2.0 pts.) $\displaystyle\int_0^1 x \arcsin x dx$

SOL: Usando integración por partes sobre la función $f(x) = x \arcsin x$, continua en su dominio y, en particular, en el intervalo $[0,1]$ por álgebra de funciones continuas (y, por lo tanto, *integrable*) y, además, considerando $u = \arcsin x$ y $dv = xdx$, se obtiene lo siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable:}\\ x = \sin u\\ \to u = \arcsin x \wedge dx = \cos u du\\ x = 0 \to u = 0;\\ x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}\end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \arcsin x dx &= \left(\frac{x^2}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leftarrow \\
&= \left(\frac{1^2}{2}\arcsin 1 - \cancelto{0}{\frac{0^2}{2}\cdot \arcsin 0}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u \cos u du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u \cos u du}{\sqrt{\cos^2 u}} \leftarrow \boxed{\sin^2 u = \tfrac{1-\cos(2u)}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{1-\cos(2u)}{2}\right)\cancel{\cos u}du}{\cancel{\cos u}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos(2u)\big)du \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(u - \frac{\sin(2u)}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \cancelto{0}{\frac{\sin\left(\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\right)}{2}} - \cancelto{0}{\left(0 - \frac{\sin(2\cdot 0)}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \blacksquare
\end{aligned}$$

(iii) (2.0 pts.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3+2\cos x}x$

SOL: La función $g(x) = \frac{1}{3+2\cos x}$ es continua (entonces *integrable*) en su dominio y, en particular, en el intervalo $[0, \frac{\pi}{3}]$ por álgebra de funciones continuas. Usando el conocido cambio de variables $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene que:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable:}\\ u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\\ \to dx = \frac{2du}{1+u^2} \wedge \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\\ x = 0 \to u = 0;\\ x = \frac{\pi}{3} \to u = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3+2\cos x} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3+2\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2du}{\cancel{1+u^2}}}{\frac{3(1+u^2)+2(1-u^2)}{\cancel{1+u^2}}}\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2du}{3+3u^2+2-2u^2}\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2du}{u^2+5}\\
&= \frac{2}{5}\sqrt{\mathbf{5}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}du}{\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2+1} \quad \leftarrow \boxed{\text{Por Teorema del Cambio de variable}}\\
&= \frac{2}{5}\sqrt{5}\left(\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\\
&= \frac{2}{5}\sqrt{5}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \cancelto{0}{\arctan\left(\frac{0}{\sqrt{5}}\right)}\right)\\
&= \frac{2}{5}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$