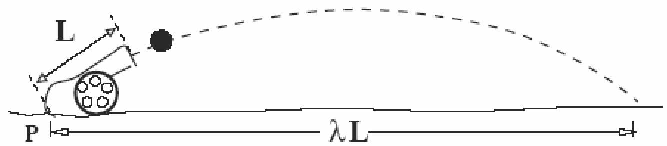
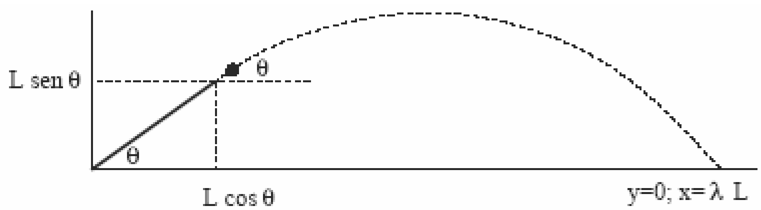
PROBLEMAS RESUELTOS POR EL PROFESOR HUGO ARELLANO DE CONTROLES ANTERIORESDE LA UNIVERSIDAD DE CHILE FI100-2, SEMESTRE OTOÑO 2007

CINEMATICA I

PROBLEMA 1: En la figura se muestra un cañón de longitud $\underline{L}$ con su extremo posterior P en contacto con el suelo horizontal; el ángulo entre el cañón y la horizontal es $\underline{\theta}$. Una bala es disparada e impacta el suelo a una distancia $\underline{\lambda L}$ del punto P. El lanzamiento ocurre en presencia de la gravedad terrestre $\underline{g}$. • Determine la rapidez con que sale la bala del cañón. Analice su resultado en el caso $\lambda \sim \cos\theta$ e interprete concisamente.



Solución



• Considerar origen de coordenadas en P. La bala sale con rapidez $v_\circ$ desconocida y ángulo θ con respecto a la horizontal:

$$x = L\cos\theta + v_\circ\cos\theta t \quad \to \quad x = \cos\theta(L + v_\circ t) \tag{1}$$

$$y = L\sin\theta + v_\circ\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \to \quad y = \sin\theta(L + v_\circ t) - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

• Bala llega al suelo ($y = 0$, $x = \lambda L$) en $t \to t^*$:

$$\lambda L = \cos\theta(L + v_\circ t^*) \tag{3}$$

$$0 = \sin\theta(L + v_\circ t^*) - \frac{1}{2}gt^{*2} \tag{4}$$

• Usar $(L + v_\circ t^*)$ de Ec. (3) en (4) y se obtiene:

$$\lambda L\tan\theta = \frac{1}{2}gt^{*2} \quad \to \quad \boxed{t^* = \sqrt{\frac{2\lambda L\tan\theta}{g}}} \tag{5}$$

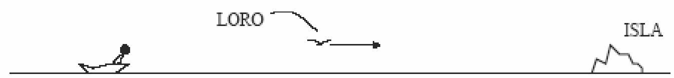
• Sustituir este valor de t^* en Ec. (3) para la rapidez y obtenemos:

$$v_\circ = \frac{1}{t^*}\left\{\frac{\lambda L}{cos\theta} - L\right\} \quad \to \quad \boxed{v_\circ = \sqrt{\frac{gL}{2\lambda\tan\theta}}\left\{\frac{\lambda}{cos\theta} - 1\right\}} \tag{6}$$

• Del resultado anterior, $\lambda \sim \cos\theta$ implica $v_\circ \sim 0$. Esto es esperable pues $\lambda \sim \cos\theta$ significa que la bala cae verticalmente desde la boca del cañón. Para que ello ocurra $v_\circ \sim 0$.

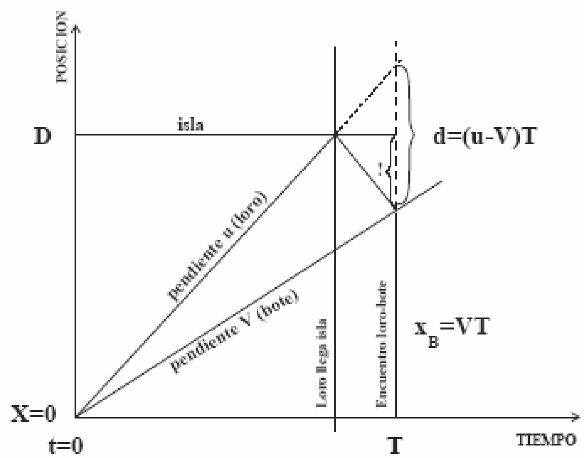
CINEMATICA II

<u>PROBLEMA 2:</u> Un pescador navega en aguas quietas en trayecto recto hacia una isla. La rapidez con que se acerca el bote a la isla es $\underline{V}$. En cierto instante la mascota del pescador (un loro) vuela hacia la isla y retorna al bote. Durante el vuelo el loro mantiene una rapidez constante $\underline{u}$ y su viaje total tiene una duración $\underline{T}$. • Determine la distancia del pescador a la isla cuando el loro retorna al bote. Examine e interprete su resultado para los casos límites $V \sim 0$, y $V \sim u$.



Solución

• Este problema admite soluciones gráficas o analíticas. Soluciones analíticas existen muchas; el resultado debe ser el mismo que en la solucion gráfica. Cualquiera sea el caso la puntuación está definida en el recuadro de abajo.
• <u>SOLUCION GRAFICA</u>: el gráfico de abajo ilustra el movimiento del bote (pendiente V) y del loro (pentiente u de ida y $-u$ de regreso).



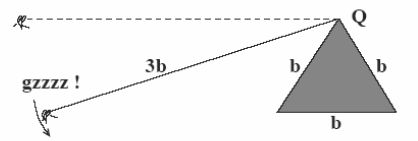
• Una manera simple de identificar la distancia isla-bote es extendiendo en forma recta la línea de ida del loro hasta $t = T$ (línea segmentada). En la figura se muestra el segmento de longitud $d = (u - V)T$, que corresponde al doble de la distancia isla-bote al momento del regreso. Por lo tando la distancia Δx entre el bote y la isla es

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{2}(u - V)T}$$

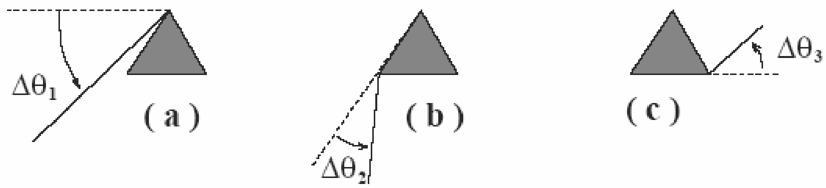
• Si $V \sim 0$ el resultado implica $\Delta x \sim uT/2$ (esperable). En efecto, si el bote está detenido el viaje de ida dura $T/2$. Si el loro viaja von velocidad u hacia la isla y el viaje (ida) dura $T/2$ entonces de distancia = velocidad×tempoi $\rightarrow \Delta x = uT/2$.
• Si $V \sim u$ entonces el resultado obtenido implica $\Delta x = 0$. Esto es esperable pues si el loro vuela a igual rapidez que el bote entonces andan siempre juntos: $\Delta x = 0$ para toto t.

CINEMATICA III

PROBLEMA 3: Una cigarra se mantiene atada por un hilo a un poste fijo de sección transversal triangular equilátera. La cigarra mantiene tenso el hilo mientras vuela con rapidez constante $\underline{v_\circ}$ con su trayectoria en el plano de la figura. Inadvertidamente la cigarra enrolla el hilo en torno al poste hasta estrellarse contra éste. La longitud de cada lado del poste es $\underline{b}$ y la del hilo es $\underline{3b}$. Inicialmente el hilo está paralelo al lado opuesto al vértice Q (donde se ata). • Grafique ciudadosamente <u>a escala</u> el módulo del vector aceleración $|\vec{a}|$ en función del tiempo, rotulando las magnitudes relevantes.



Solución



• Identificamos tres casos, todos de movimiento circunferencial uniforme pero de distintos radios. En cada caso la aceleración es sólo centrípeta de valor v^2/R:

Caso a.- Desplazamiento total de $\Delta\theta_1 = \pi/3$, radio $R_1 = 3b$, velocidad angular $\omega_1 = v_\circ/R_1 = v_\circ/3b$. El lapso y aceleración del 1er intervalo:

$$\texttt{Lapso:} \quad \Delta t_1 = \frac{\Delta\theta_1}{\omega_1} = \left(\frac{\pi b}{v_\circ}\right) \;; \qquad \texttt{aceleración:} \quad a_1 = \frac{v_\circ^2}{R_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{v_\circ^2}{b}\right)$$

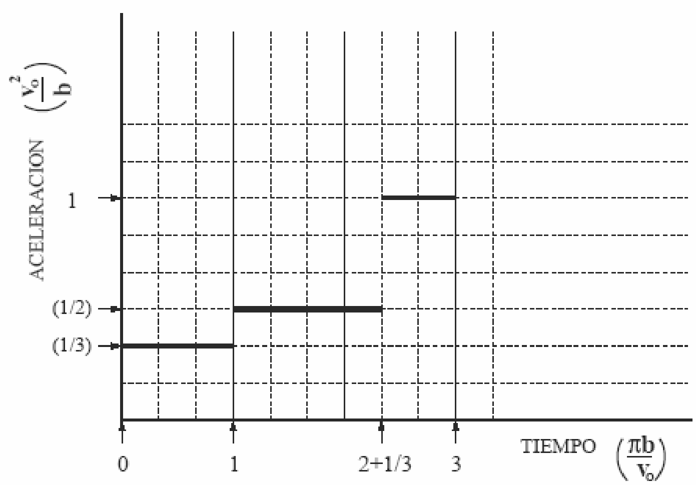
Caso b.- Desplazamiento total de $\Delta\theta_2 = 2\pi/3$, radio $R_2 = 2b$, velocidad angular $\omega_2 = v_\circ/R_2 = v_\circ/2b$. El lapso y aceleración del 2do intervalo:

$$\texttt{Lapso:} \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta\theta_2}{\omega_2} = \frac{(2\pi/3)}{(v_\circ/2b)} = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi b}{v_\circ}\right) \;; \qquad \texttt{aceleración:} \quad a_2 = \frac{v_\circ^2}{R_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_\circ^2}{b}\right)$$

Caso c.- Desplazamiento total de $\Delta\theta_3 = 2\pi/3$, radio $R_3 = b$, velocidad angular $\omega_3 = v_\circ/R_3 = v_\circ/b$. El lapso y aceleración del 3er intervalo:

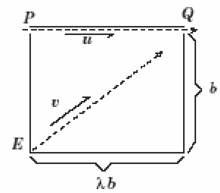
$$\texttt{Lapso:} \quad \Delta t_3 = \frac{\Delta\theta_3}{\omega_3} = \frac{(2\pi/3)}{(v_\circ/b)} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi b}{v_\circ}\right) \qquad \texttt{aceleración:} \quad a_3 = \frac{v_\circ^2}{R_3} = \left(\frac{v_\circ^2}{b}\right)$$

• La aceleración es constante por intervalos. El tiempo total de vuelo de la cigarra es: $(1 + 4/3 + 2/3)\pi b/v_\circ = 3(\pi b/v_\circ)$. Todo lo anterior se resume en el siguiente gráfico:



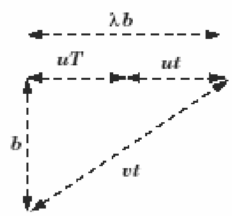
CINEMATICA III

PROBLEMA 1: En la figura se ilustra una sala rectangular de longitud $\underline{b}$ y ancho $\underline{\lambda b}$. Desde la esquina P será arrastrada en forma rectilínea una zanahoria con rapidez constante $\underline{u}$ para desaparecer por la esquina Q. Desde el rincón E correrá en forma recta una liebre con rapidez constante $\underline{v}$ para alcanzar la zanahoria ($v > u$). La liebre se propone atrapar la zanahoria a punto de desaparecer por Q.



- [4Pt] Determine el lapso T que debe esperar la liebre para comenzar su carrera a contar del instante en que la zanahoria emerge por P.
- [2Pt] Determine el ancho mínimo de la sala λb que permite que la liebre atrape la zanahoria antes de desaparecer por la esquina Q.

Solución



- Sea $\boldsymbol{t}$ el lapso que tarda la liebre en llegar a la esquina $\boldsymbol{Q}$. Entonces, de acuerdo al triángulo dibujado se tiene

$$(vt)^2 = b^2 + \lambda b^2 \quad \rightarrow \quad vt = b\sqrt{1+\lambda^2}$$

- Considerando el cateto superior...

$$uT + ut = \lambda b$$

- Combinando ambos resultados y despejando T...

$$\boxed{T = \frac{\lambda b}{u} - \frac{b}{v}\sqrt{1+\lambda^2}}$$

- Para que la liebre alcance la zanahoria se exige que $\boldsymbol{T \geq 0}$. Entonces

$$\frac{\lambda b}{u} \geq \frac{vb}{v}\sqrt{1+\lambda^2} \quad \rightarrow \quad \lambda^2\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2}\right) \geq \frac{1}{v^2}$$

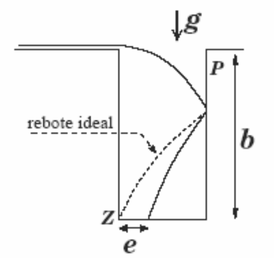
con lo cual

$$\boxed{\lambda b \geq b\frac{u}{\sqrt{v^2-u^2}}}$$

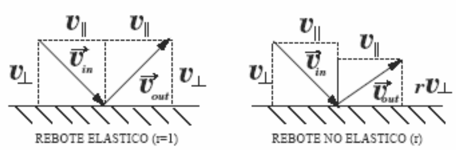
CINEMATICA IV

PROBLEMA 2: En la figura se muestra una moneda resbalando por una superficie horizontal la cual tiene una zanja de paredes lisas de ancho $\underline{a}$ y profundidad $\underline{b}$. La rapidez de la moneda es tal que al rebotar elásticamente con la pared frontal P caería justo en la esquina Z indicada. Sin embargo el rebote en P es inelástico, caracterizado por un 'coeficiente de restitución' $\underline{r}$ explicado mas abajo ($r \leq 1$).

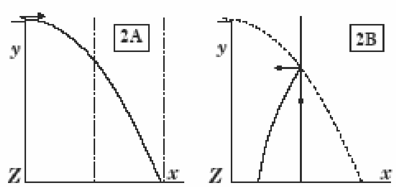
- [3pt] Determine la posición y velocidad de la moneda al alcanzar la pared P.
- [2pt] Determine la distancia e con respecto a la esquina Z donde cae la moneda.
- [1Pt] Examine e interprete su resultado para el caso extremo $r \sim 1$.



REBOTES: tanto los rebotes elásticos como inelásticos conservan la componente tangencial de la velocidad ($v_{||}$). La diferencia entre ambos casos ocurre en relación a la componente perpendicular ($v_\perp$) de las velocidades antes ($\vec{v}_{in}$) y después ($\vec{v}_{out}$) del rebote. En un rebote inelástico la componente perpendicular de la velocidad emergente es r veces la de la incidente (ver figura).



Solución



- Para determinar velocidad $\boldsymbol{u}$ de la moneda en el plano antes de saltar e imponer que llega a $\boldsymbol{Z}$ results útil estudiar el problema equivalente mostrado en la figura (2A). Tomar origen en Z para movimiento parabólico e imponer que cuando $\boldsymbol{y = 0}$ se cumple $\boldsymbol{x = 2a}$:

$$y = b - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad 0 = b - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2b}{g}}$$

$$x = ut \quad \rightarrow \quad 2a = u\sqrt{\frac{2b}{g}} \quad \Rightarrow \quad u = a\sqrt{\frac{2g}{b}}$$

- Hemos encontrado la velocidad de salto de la moneda. Determinamos lugar de impacto y velocidad al llegar a la pared ($\boldsymbol{x = a}$). Tiempo $\boldsymbol{t_p}$ en llegar a la pared:

$$x = ut \quad \rightarrow \quad a = ut_p \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{a}{u}$$

- Coordenada $\boldsymbol{y}$ en ese instante $\boldsymbol{t_p}$:

$$y = b - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad y_p = b - \frac{1}{2}gt_p^2 = b - \frac{ga^2}{2u^2} = b - \frac{ga^2}{2(2a^2g/b)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_p = \frac{3}{4}b}$$

- Velocidades en $\boldsymbol{t_p}$:

$$\boxed{v_x = u}; \qquad v_y = -gt_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_y = -\frac{bg}{u}}$$

• Analizamos la caída en el segundo trecho con la posición y velocidad inicial encontradas. El cronómetro se ajusta $t \to 0$ en el instante del rebote. Determinamos el instante t_s de llegada al suelo:

$$y = \frac{3b}{4} - \frac{bg}{u}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \to \quad 0 = \frac{3b}{4} - \frac{bg}{u}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 \quad \to \quad \frac{1}{2}gt_s^2 + \frac{bg}{u}t_s - \frac{3b}{4} = 0$$

Resolvemos:

$$t_s = \frac{-\frac{bg}{u} \pm \sqrt{(\frac{bg}{u})^2 + 4\frac{1}{2}g\frac{3b}{4}}}{g}$$

Sustituyendo resultado $u = a\sqrt{2g/b}$, considerando la solución positiva (llegada despues de t=0) y simplificando...

$$t_s = \sqrt{\frac{2b}{g}} - \sqrt{\frac{b}{2g}}$$

• Para la coordenada x en t_s, partiendo de $x = a$ hacia Z con rapidez ru:

$$x = a - rut \quad \to \quad e = a - rut_s \quad \to \quad e = a - ra\sqrt{\frac{2g}{b}}\left(\sqrt{\frac{2b}{g}} - \sqrt{\frac{b}{2g}}\right)$$

Por lo tanto

$$\boxed{e = a(1-r)}$$

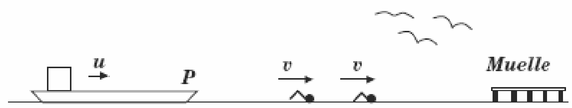
• Si $r \sim 1$ entonces $e \sim 0$, lo que indica que si el rebote es elástico, la moneda cae justo en Z, como era de esperar!

CINEMATICA V

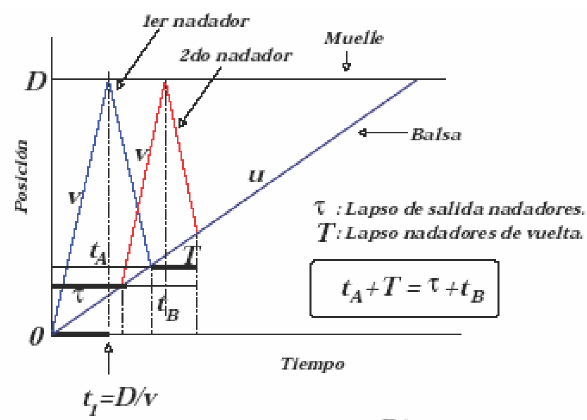
PROBLEMA 1: En un lago de aguas quietas una balsa se aproxima al muelle con velocidad constante de magnitud $\underline{u}$. Desde la proa P de la balsa dos nadadores de igual marca salen en dirección al muelle para retornar inmediatamente. Los nadadores parten con una diferencia de tiempo igual a $\underline{\tau}$ y la rapidez de ambos nadadores es $\underline{v}$ $(v > u)$.

A) [6Pt] Represente gráficamente lo descrito en un gráfico posición/tiempo y determine el lapso transcurrido entre la llegada de cada nadador al regresar a la balsa.

B) [1Pt] Analice e interprete su resultado para el caso $u = 0$.



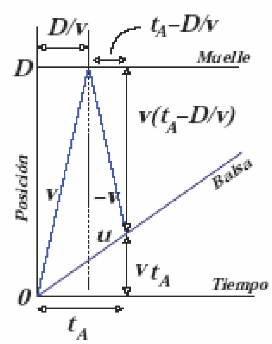
Solución



- Representación gráfica del movimiento. Muelle a distancia D de la balsa desde el instante en que salta el primer nadador.

- De acuerdo al gráfico denotamos:
t_A: Lapso ida-vuelta primer nadador.
t_B: Lapso ida-vuelta segundo nadador.
τ: Lapso de partida entre dos nadadores.
T: Lapso de llegada entre dos nadadores.
Entonces, del gráfico:

$$t_A + T = \tau + t_B\ .$$



- Necesitamos entonces calcular el lapso de ida-vuelta de un nadador cuando parte desde cierta distancia D del muelle.

- Del gráfico se obtiene

$$D = ut_A + v(t_A - \frac{D}{v}) \Rightarrow \boxed{t_A = \frac{2D}{u+v}}$$

- Para calcular t_B cambiamos distancia inicial al muelle: $D \rightarrow D - u\tau$, con lo cual

$$\boxed{t_B = \frac{2(D-u\tau)}{u+v}}$$

- Entonces,

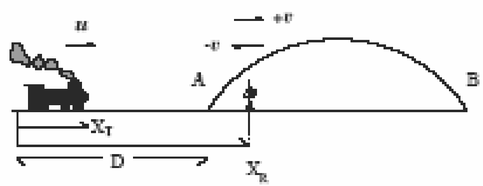
$$t_A + T = \tau + t_B \quad \Rightarrow \quad \frac{2D}{u+v} + T = \tau + \frac{2(D-u\tau)}{u+v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{v-u}{v+u}\tau}$$

- En el caso $u = 0 \Rightarrow T = \tau$, que es de esperar pues si la balsa está inmóvil los lapsos de partida deben ser los mismos que de llegada.

CINEMATICA VI

En la figura se muestra un robot sobre un puente $\overline{AB}$ de longitud $\underline{L}$. El robot avista a un tren acercándose al puente con rapidez $\underline{u}$; en ese momento el robot se encuentra a una distancia $L/3$ del extremo A del puente. El robot considera evitar al tren saliendo por A ó por B, y concluye que en ambos casos es alcanzado por el tren al momento de salir del puente. Determine la rapidez del robot.

Solución



- Sea v la rapidez del robot;
- según definición de ejes $\rightarrow$ velocidad de robot hacia A es $-v$;
- las coordenadas tren y robot hacia A, con D la distancia inicial puente-tren:

$$x_T = ut \tag{1}$$
$$x_R = D + \frac{1}{3}L - vt \tag{2}$$

Encuentro en A ($x_A = D$), en instante t_A:

$$D = ut_A \tag{3}$$
$$D = D + \frac{1}{3}L - vt_A \tag{4}$$

Deshacerse de $t_A \Longrightarrow$

$$\boxed{\tfrac{1}{3}L = \tfrac{v}{u}D} \tag{5}$$

Encuentro en B ($x_B = D + L$) en instante t_B; velocidad de robot$=+v$:

$$D + L = ut_B \tag{6}$$
$$D + L = D + \frac{L}{3}L + vt_B \tag{7}$$

Deshacerse de $t_B \Longrightarrow$

$$\boxed{\tfrac{2}{3}L = \tfrac{v}{u}(D + L)} \tag{8}$$

Combinando Ecs. (5) y (8) $\Longrightarrow$

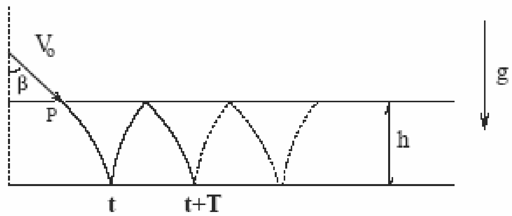
$$\boxed{v = \tfrac{1}{3}u} \tag{9}$$

CINEMATICA VI

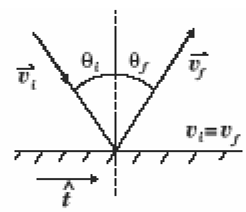
En presencia de la gravedad terrestre una "pelota saltarina" entra con rapidez $\underline{V_\circ}$ por el techo de un pasillo de altura $\underline{h}$. El ángulo de entrada de la pelota con respecto a la vertical es $\underline{\beta}$ y tanto el techo como el piso del pasillo son lisos y horizontales. La pelota rebota elástica e indefinidamente entre el piso y techo.

A) [4Pts] Calcule el período T_g entre dos impactos consecutivos con el piso.

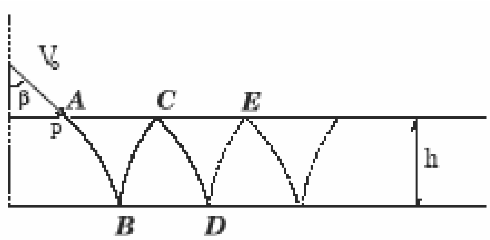
B) [2Pts] <u>En ausencia de gravedad</u>, calcule el período $T_\circ$ entre dos impactos consecutivos con el piso y verifique que éste es un caso particular de su respuesta en A.



NOTA: en un rebote elástico las rapideces incidentes y emergentes son iguales ($v_i = v_f$) y las proyecciones de las velocidades a lo largo de la superficie de impacto son conservadas ($\vec{v}_i \cdot \hat{t} = \vec{v}_f \cdot \hat{t}$).



Solución



$\boxed{\text{Parte A}}$

- Simetría $\Longrightarrow t_{AB} = t_{BC} = t_{CD} = \cdots$
- Por lo tanto $T_g = 2t_{AB}$.
- Calculamos t_{AB}; descripción movimiento vertical con $y = 0$ en el piso:

$$y = h - v_\circ \cos\beta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{10}$$

• Saltarina en el suelo $\Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow$

$$0 = h - v_\circ \cos\beta t_{AB} - \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \tag{11}$$

• Se resuelve ecuación cuadrática para t_{AB} :

$$t_{AB} = \frac{v_\circ \cos\beta \pm \sqrt{v_\circ^2 \cos^2\beta + 4h\frac{1}{2}g}}{-g} \tag{12}$$

• Consideramos solución $t_{AB} > 0$ (caso $v_\circ \cos\beta - \sqrt{\ldots}$) pues pasada por B es posterior a pasada por A. Factorizando por $v_\circ \cos\beta$ y usando $T_g = 2t_{AB}$ ...

$$T_g = \frac{2v_\circ \cos\beta}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_\circ^2 \cos^2\beta}} - 1 \right) \tag{13}$$

$\boxed{\text{Parte B}}$

• Cuando $g = 0$ el movimiento es rectilíneo; $v_y = -v_\circ \cos\beta$.
• El lapso t_{AB} es en este caso $h/v_\circ \cos\beta$.
• El período $T_\circ = 2t_{AB}$ da:

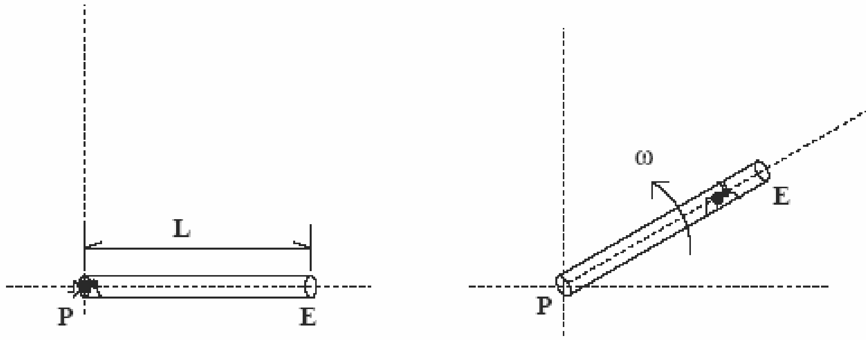
$$\boxed{T_\circ = \tfrac{2h}{v_\circ \cos\beta}} \tag{14}$$

• Verificamos que (13) coincide con $T_\circ$ cuando $g \longrightarrow 0$:

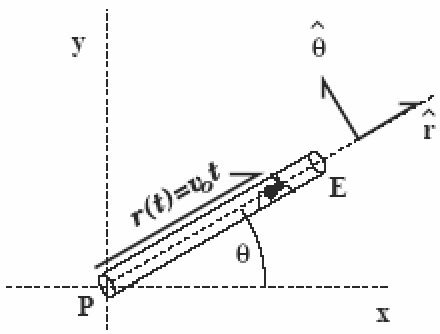
$$\begin{aligned} T_g &= \frac{2v_\circ \cos\beta}{g} \left[\left(1 + \frac{2gh}{v_\circ^2 \cos^2\beta} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] && (15) \\ &\approx \frac{2v_\circ \cos\beta}{g} \left(\left(\cancel{1} + \frac{1}{2} \frac{2gh}{v_\circ^2 \cos^2\beta} \right) - \cancel{1} \right) && (16) \\ &\approx \frac{2v_\circ \cos\beta}{g} \left(\frac{1}{2} \frac{2gh}{v_\circ^2 \cos^2\beta} \right) = \frac{2h}{v_\circ \cos\beta} = T_\circ && (17) \end{aligned}$$

CINEMATICA VII

En ausencia de gravedad y sobre una superficie pulida, un tubo de longitud $\underline{L}$ rota en torno a su eje P con velocidad angular constante $\underline{\omega}$. Dentro del tubo una "hormiguita ciega" camina hacia el extremo abierto E del tubo con rapidez constante $\underline{v_o}$ relativa al tubo y partiendo desde P. Sin darse cuenta, la "hormiguita ciega" sale disparada del tubo. Determine la posición de la hormiguita en función del tiempo desde el momento en que parte desde P.



Solución



- Antes de salir del tubo la posición radial está data por $r(t) = v_o t$;
- las coordenadas (x, y):

$$x = v_o t \cos(\omega t) \quad (18)$$
$$y = v_o t \sin(\omega t) \quad (19)$$

- Desde que la hormiga (H) sale del tubo por E en el instante $t_S \rightarrow$ movimiento rectilíneo que pasa por $\vec{r}_{salida} = \vec{r}_S$ con velocidad $\vec{v}_{salida} = \vec{v}_S$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_S + \vec{v}_S(t - t_S) \quad (20)$$

- El instante de salida: $t_S = \frac{L}{v_o}$;
- El ángulo θ al salir: $\theta_S = \omega t_S = \frac{\omega L}{v_o}$.

• **Coordenadas de salida:**

$$
\begin{aligned}
x_S &= L\cos(\omega L/v_\circ) && (21)\\
y_S &= L\sin(\omega L/v_\circ) && (22)
\end{aligned}
$$

• **La velocidad de salida (con respecto a la superficie):**

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{hormiga/superficie} &= \vec{v}_{hormiga/E} + \vec{v}_{E/superficie} && (23)\\
\vec{v}_S &= v_\circ \hat{r} + \omega L \hat{\theta} && (24)
\end{aligned}
$$

• **Proyectando según ejes x e y (notar orientación de vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ en la figura):**

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_\circ \cos\theta_S - \omega L \sin\theta_S && (25)\\
v_y &= v_\circ \sin\theta_S + \omega L \cos\theta_S && (26)
\end{aligned}
$$

• **con lo anterior Ec (20) $\Rightarrow$:**

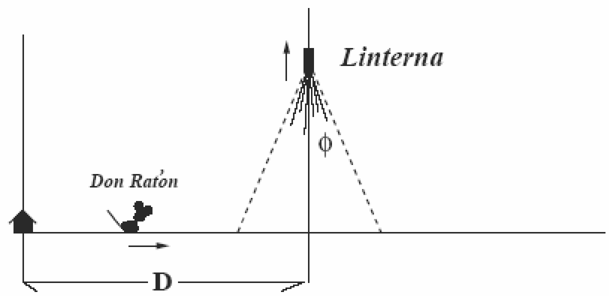
$$
\begin{aligned}
x &= L\cos\theta_S + (v_\circ \cos\theta_S - \omega L \sin\theta_S)(t - t_S) && (27)\\
y &= L\sin\theta_S + (v_\circ \sin\theta_S + \omega L \cos\theta_S)(t - t_S) && (28)
\end{aligned}
$$

• **donde $\theta_S = \omega L/v_\circ$ y $t_S = L/v_\circ$.**

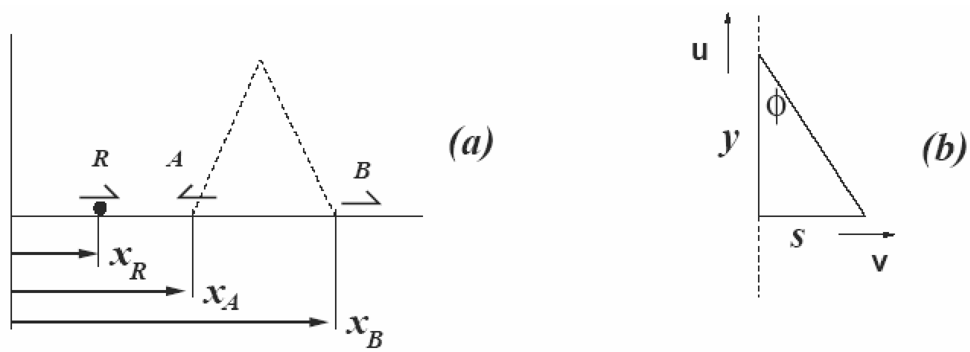
CINEMATICA VIII

PROBLEMA 1 Una linterna asciende verticalmente con rapidez constante $\boldsymbol{u}$ iluminando en forma cónica un área circular sobre el piso. Mientras ello ocurre un ratón se aleja de su casa con rapidez constante $\boldsymbol{v}_\circ$ en trayectoria rectilínea que atraviesa diametralmente el área iluminada. Inicialmente el ratón se encuentra en la puerta de su casa y la linterna sobre el piso a una distancia $\boldsymbol{D}$ del ratón. El cono de iluminación de la linterna está caracterizado por un ángulo directriz $\boldsymbol{\phi}$.

Calcule el lapso $\boldsymbol{T}$ que el ratón permanece iluminado. **Examine e interprete** concisamente su resultado en el caso límite $\boldsymbol{T}$ muy pequeño y $\boldsymbol{T}$ muy grande.



Solución



- Sea $\boldsymbol{v}$ la rapidez de expansión del área iluminada: $\boldsymbol{v} = \frac{\delta s}{\delta t}$. De figura (b) y considerando $\boldsymbol{u} = \delta y/\delta t$:

$$s = y \tan\phi \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\delta s}{\delta t}\right) = \left(\frac{\delta y}{\delta t}\right) \tan\phi \quad \Rightarrow \quad v = u \tan\phi \qquad (1)$$

- La coordenada del ratón (R) con respecto a su casa: $\boldsymbol{x_R = v_\circ t}$
- Las coordenadas de sus bordes (A y B) con respecto a casa de R...

$$x_A = D - vt \qquad (2)$$
$$x_B = D + vt \qquad (3)$$

- Ratón se topa con A en $\boldsymbol{t_A} \rightarrow \boldsymbol{x_R(t) = x_A(t)} \Rightarrow \boldsymbol{v_\circ t = D - vt} \Rightarrow$

$$t \rightarrow t_A = \frac{D}{v_\circ + v}$$

• Se calcula $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{T = t_B - t_A = \frac{2Dv}{v_\circ^2 - v^2} \longrightarrow T = \frac{2Du\tan\phi}{v_\circ^2 - u^2\tan^2\phi}} \tag{4}$$

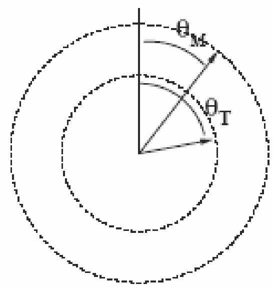
• Cuando $\boldsymbol{T}$ es pequeño $\Rightarrow \boldsymbol{2Du\tan\phi \sim 0} \Rightarrow$ a) $\boldsymbol{\phi \sim 0}$, o sea iluminación recta hacia abajo; b) $\boldsymbol{u \sim 0}$, ó sea linterna subiendo lentamente; c) $\boldsymbol{D \sim 0}$, ó sea una linterna muy cerca de la casa de R.

• Cuando $\boldsymbol{T}$ es muy grande ello ocurre cuando el denominador es muy cercano a cero: $\boldsymbol{v_\circ \sim u\tan\phi}$ que indica que el ratón alcanza penosamente el borde B.

CINEMATICA IX

PROBLEMA 2 Cada lapsos τ (2,14 años) la distancia entre tierra y marte es mínima. Suponiendo órbitas curcunferenciales, uniformes y coplanares, **determine el período** de órbita de marte en el sistema solar. **Examine** su resultado para el caso τ muuuy grande e interprete concisamente.

Solución



- Sea $t = 0$ el instante de mayor cercanía entre marte y tierra. Sea $\omega_T = 2\pi/T$ la velocidad angular de tierra con respecto al sistema solar $\Longrightarrow$

$$\theta_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right) t.$$

- Sea $\omega_M = 2\pi/T_M$ la velocidad angular de marte con respecto al sistema solar $\Longrightarrow$

$$\theta_M = \left(\frac{2\pi}{T_M}\right) t.$$

- El instante de mayor cercanía (τ) ocurrirá cuando nuevamente marte-tierra-sol estén alineados $\Longrightarrow \theta_T(t) = \theta_M(t) + 2\pi \Longrightarrow$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)\tau = \left(\frac{2\pi}{T_M}\right)\tau + 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{T_M} + 1 \quad \Rightarrow \quad T_M = \frac{\tau}{(\frac{\tau}{T}) - 1} \tag{5}$$

- Sustituimos T=1 año y τ=2.14 año $\Longrightarrow$

$$T_M = \frac{2.14}{2.14 - 1} = \frac{2.14}{1.14} = \frac{2.14 + 0.14 - 0.14}{1.14} = 1 - \frac{0.14}{1.14} \sim 1.9 \text{ años}$$

- En caso de que $\tau \gg T \Rightarrow \tau/T \gg 1$ y la relación para T_M (Ec. 5)...

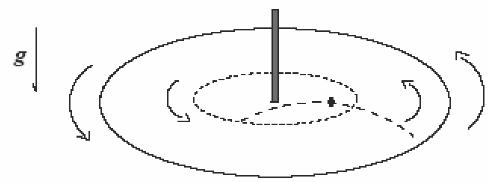
$$T_M = \frac{\tau}{(\frac{\tau}{T}) - 1} \sim \frac{\tau}{(\frac{\tau}{T})} = T$$

por lo tanto $T_M \sim T$, indicando que la velocidad de órbita de marte es muy similar a la de tierra (tiene sentido!).

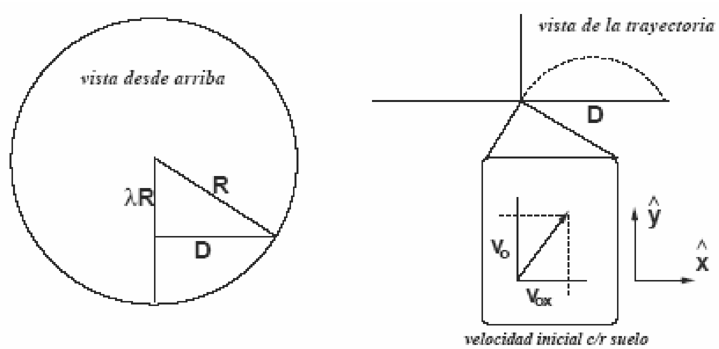
CINEMATICA X

PROBLEMA 3 Un disco de radio $\boldsymbol{R}$ dispuesto horizontalmente gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ en torno a un eje vertical que pasa por su centro. A una distancia $\boldsymbol{\lambda R}$ del eje ($0 \leq \boldsymbol{\lambda} < 1$) una pulga brinca con una rapidez $\boldsymbol{v}_\circ$ relativa a su posición de salto y perpendicular ésta.

Determine el máximo $\boldsymbol{\lambda}$ que garantice que la pulga cae sobre el disco después de su salto. **Examine** su resultado en el caso límite $\boldsymbol{\omega v}_\circ \gg \boldsymbol{g}$ e interprete concisamente.



Solución



- Al brincar la pulga (desde $\boldsymbol{\lambda R}$ del centro) su trayectoria vista desde arriba es recta; la condición 'llegar al borde' implica para el alcance horizontal $\boldsymbol{D}$:

$$R^2 = (\lambda R)^2 + D^2 \quad \rightarrow \quad D = R\sqrt{1-\lambda^2} \tag{6}$$

- La velocidad de salida de la pulga con respecto al suelo:

$$\vec{v}_{pulga/suelo} = \vec{v}_{pulga/lugardesalto} + \vec{v}_{lugardesalto/suelo} \tag{7}$$

$$v_{\circ x}\hat{x} + v_{\circ y}\hat{y} = v_\circ \hat{y} + \omega(\lambda R)\hat{x} \tag{8}$$

- Separando por componentes:

$$v_{\circ x} = \omega \lambda R \qquad v_{\circ y} = v_\circ$$

- Las coordenadas de la pulga una vez en vuelo:

$$x = 0 + v_{\circ x} t \quad \rightarrow \quad x = \omega \lambda R t \tag{9}$$

$$y = 0 + v_{\circ y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad y = v_\circ t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{10}$$

• Instante de llegada de pulga al suelo... $y(t) = 0 \longrightarrow$

$$0 = v_\circ t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t \to t_s = \frac{2v_\circ}{g} \tag{11}$$

• Puesto que en t_s la distancia recorrida según x es $D \longrightarrow$

$$D = x(t_s)$$

• Sustituyendo expresión para D (Ec. 6) y $x(t = t_s)$ con t_s dado por Ec. 11,

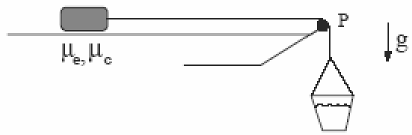
$$R\sqrt{1-\lambda^2} = \omega\lambda R\left(\frac{2v_\circ}{g}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{1+4(\omega v_\circ/g)^2}$$

• Cuando $\omega v_\circ \gg g$ se encuentra que $\lambda \sim 0$. Vale decir, el brinco de la pulga debe ocurrir muy cerca del eje del disco. La condición $\omega v_\circ \gg g$ se da cuando: i.- rapidez de salto muy grande ($v_\circ \gg g/\omega$); ii.- velocidad de rotación del disco muy grande ($\omega \gg g/v_\circ$).

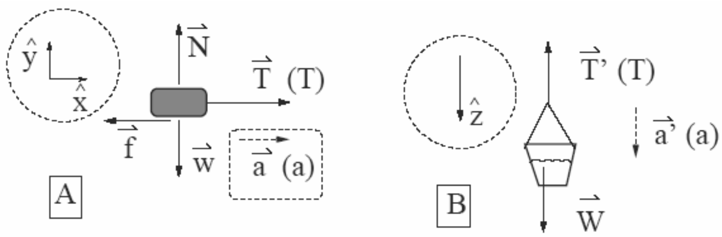
DINAMICA I

$\boxed{2}$ **Sobre una superficie horizontal rugosa posa un bloque. Los coeficientes de roce mutuos estático y cinético son $\underline{\mu_e}$ y $\underline{\mu_c}$ respectivamente ($\mu_c < \mu_e$). El bloque se une a un balde mediante una cuerda ideal la cual descansa sin roce en la polea P. Muy cuidadosa y lentamente se agregan gotas de agua al balde hasta el instante en que éste comienza a resbalar arrastrando al bloque.**

- **Determine la rapidez del balde cuando éste ha bajado una distancia $\underline{H}$.**



Solución



- Analizamos BLOQUE A de masa m (por determinar); interacciones: gravedad ($\vec{w}$), contacto con roce ($\vec{N} + \vec{f}$) y cordel ($\vec{T}$). Ecuación vectorial del movimiento y proyecciones según x,y:

$$\begin{array}{llcll} \texttt{vectorial} & \vec{w} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{T} & = & m\vec{a} & \\ \texttt{según y} & -mg + N + 0 + 0 & = & 0 & \rightarrow \boxed{N = mg} \quad (1) \\ \texttt{según x} & 0 + 0 - f + T & = & ma & \rightarrow \boxed{T - f = ma} \quad (2) \end{array}$$

- Analizamos el BALDE B de masa M (por determinar); interacciones: gravedad ($\vec{W}$) y cordel ($\vec{T}'$). Ecuación vectorial del movimiento y proyección según z:

$$\begin{array}{llcll} \texttt{vectorial} & \vec{W} + \vec{T}' & = & M\vec{a}' & \\ \texttt{según z} & +Mg - T & = & Ma & \rightarrow \boxed{Mg - T = Ma} \quad (3) \end{array}$$

- A PUNTO DE RESBALAR $a = 0$ y $f = \mu_e N$. Las Ecs. (1-3) se escriben $T = f = \mu_e N = \mu_e mg$, y $T = Mg$. Por lo tanto:

$$M = \mu_e m \qquad \rightarrow \boxed{\mu_e = M/m.}$$

- RESBALANDO: en este caso $f = \mu_c mg$. Sumamos ecuaciones (2) y (3) y tenemos

$$Mg - \mu_c mg = ma + Ma \qquad \rightarrow (M/m - \mu_c)g = (1 + M/m)a$$

- Reemplazando valor de M/m obtenemos:

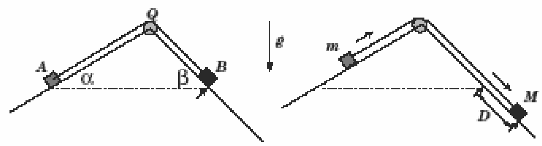
$$a = \frac{\mu_e - \mu_c}{1 + \mu_e} g$$

- El balde baja con la aceleración a; para encontrar su rapidez al cabo de recorrer una distancia H usamos: $v^2 - 0^2 = 2aH$. Entonces:

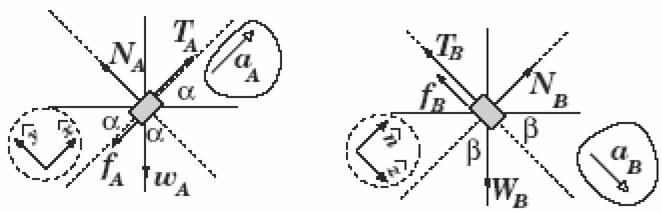
$$\boxed{v^2 = 2\left(\frac{\mu_e - \mu_c}{1 + \mu_e}\right) gH}$$

DINAMICA II

PROBLEMA 2: Los bloques A y B de la figura, de masas $\underline{m}$ y $\underline{M}$ respectivamente, son unidos mediante una cuerda ideal y posan sobre planos rugosos inclinados unidos en Q. Los ángulos de inclinación de cada tramo con respecto a la horizontal son $\underline{\alpha}$ y $\underline{\beta}$ respectivamente. La cuerda se apoya sin roce en Q y se mantiene paralela a cada plano. El coeficiente de roce cinético (dinámico) bloque–superficie es el mismo para ambos bloques. Los bloques son soltados con el cordel estirado y comienzan a resbalar inmediatamente. Al cabo de un lapso $\underline{\tau}$ se han desplazado una distancia $\underline{D}$ como se indica.
A) [6Pt] Determine el coeficiente de roce entre los bloques y la superficie.
B) [1Pt] Examine e interprete su resultado para el caso $\{\ m=0,\ D\approx 0)\ \}$.



Solución



- La cuerda mantiene una tensión única de magnitud T. Puesto que ambos bloques resbalan se satisface la relación fza de roce/normal: "$f=\mu N$". Además, las aceleraciones de ambos bloques son iguales en magnitud; la denotaremos a.
- Sobre el cuerpo A actúan la cuerda ($\vec{T}_A$), el peso ($\vec{w}_A = m\vec{g}$) y el contacto ($\vec{C}_A = \vec{f}_A + \vec{N}_A$). La ecuación del movimiento y proyección según los ejes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ indicados:

$$\begin{aligned} \vec{T}_A + m\vec{g} + \vec{f}_A + \vec{N}_A &= m\vec{a}_A & (3)\\ T - mg\sin\alpha - \mu N_A + 0 &= ma \quad \text{según } \hat{x} & (4)\\ 0 - mg\cos\alpha + 0 + N_A &= 0 \quad \text{según } \hat{y} & (5)\end{aligned}$$

- Sobre el cuerpo B actúan la cuerda ($\vec{T}_B$), el peso ($\vec{W}_B = M\vec{g}$) y el contacto ($\vec{C}_B = \vec{f}_B + \vec{N}_B$). La ecuación del movimiento y proyección según los ejes $\hat{z}$ y $\hat{n}$ indicados:

$$\begin{aligned} \vec{T}_B + M\vec{g} + \vec{f}_B + \vec{N}_B &= M\vec{a}_B & (6)\\ -T + Mg\sin\beta - \mu N_B + 0 &= Ma \quad \text{según } \hat{z} & (7)\\ 0 - Mg\cos\beta + 0 + N_B &= 0 \quad \text{según } \hat{n} & (8)\end{aligned}$$

- De Ecs. 5 y 8 obtenemos

$$\boxed{N_A = mg\cos\alpha \qquad N_B = Mg\cos\beta}$$

- Sumando las Ecs. 4 y 7, y sustituyendo resultado para las normales:

$$-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + Mg\sin\beta - \mu Mg\cos\beta = (m+M)a$$

- Despejamos μ:

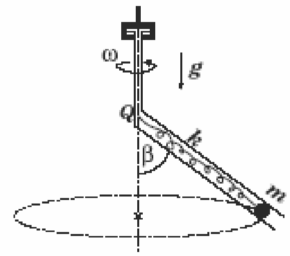
$$\mu = \frac{Mg\sin\beta - mg\sin\alpha - (m+M)a}{mg\cos\alpha + Mg\cos\beta}$$

- Si los bloques recorren D en un lapso τ con aceleración a, entonces $D = (1/2)a\tau^2 \Longrightarrow$

$$\boxed{\mu = \frac{M\sin\beta - m\sin\alpha - (m+M)\frac{2D}{g\tau^2}}{m\cos\alpha + M\cos\beta}}$$

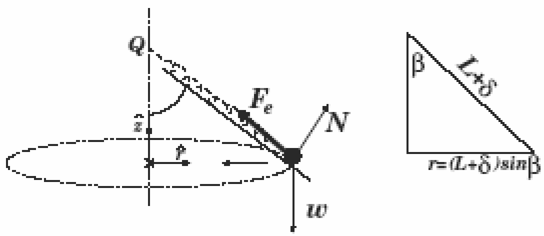
- En el caso extremo $m=0$ y $D\sim 0$ se tiene $\mu \to \frac{M\sin\beta}{m\cos\alpha} = \tan\beta$, un resultado conocido para el caso de un bloque a punto de resbalar sobre un plano inclinado, o resbalando casi sin acelerar.

DINAMICA III



PROBLEMA 3: En presencia de la gravedad terrestre $\underline{g}$, una bolita de masa $\underline{m}$ es sostenida mediante un resorte de constante elástica $\underline{k}$ y longitud natural $\underline{L}$. El conjunto se dispone dentro de un tubo de paredes lisas inclinado en un ángulo $\underline{\beta}$ con respecto a la vertical. El tubo se hace girar con velocidad angular constante $\underline{\omega}$ y la bolita mantiene una trayectoria circunferencial. El extremo superior Q del resorte se ubica en el eje de rotación.
A) [6Pt] Determine la elongación δ del resorte.
B) [1Pt] En base a su resultado, examine y discuta la posibilidad de que $\delta = 0$.

Solución



• Las fuerzas actuando sobre la bolita sostenida por el resorte son el peso ($\vec{w} = m\vec{g}$), la fuerza del resorte ($\vec{F}_e$, de magnitud $k\delta$), y el contacto sin roce ($\vec{N}$). El movimiento del objeto es circunferencial uniforme y por lo tanto su aceleración es del tipo $\omega^2\times$radio. La ecuación del movimiento y proyecciones correspondientes segun los vectoners unitarios $\hat{r}$ y $\hat{z}$ indicados:

$$m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{N} = m\vec{a} \qquad (9)$$

$$0 - k\delta\sin\beta + N\cos\beta = -m\omega^2 r \qquad \text{según } \hat{r} \qquad (10)$$

$$-mg + k\delta\cos\beta + N\sin\beta = 0 \qquad \text{según } \hat{z} \qquad (11)$$

• Despejar N de Ec. 11 y sustituir en Ec. 10; usar resultado geométrico $r = (L+\delta)\sin\beta$ y despejar δ. Se obtiene:

$$\boxed{\delta = \frac{m(g\cos\beta + \omega^2 L\sin^2\beta)}{k - m\omega^2\sin^2\beta}}$$

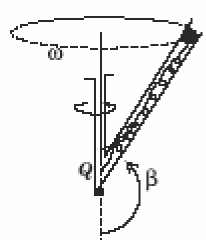
• Si se examina el caso $\delta = 0$ se observa que es necesario que

$$g\cos\beta + \omega^2 L\sin^2\beta = 0$$

Sean $b \equiv g/\omega^2 L$ y $x \equiv \cos\beta$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$x^2 - bx - 1 = 0 \qquad \to \qquad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

• La solución con signo '+' implica $\cos\beta > 1$ la cual es inaceptable; sólo queda la solución con signo '−': $\cos\beta = (b/2) - \sqrt{1+(b/2)^2}$, la cual, bajo valores adecuados de $g/\omega^2 L$ llevan a soluciones $\beta > \pi/2$, como se ilustra en la figura.



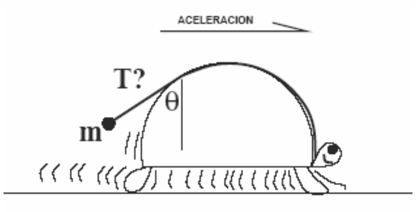
DINAMICA IV

Una tortuga veloz de masa M se tracciona arrastrando consigo una carga de masa m mediante una cuerda ideal. La tortuga mantiene una aceleración horizontal constante, y la porción colgante de cuerda forma un ángulo θ con la vertical.

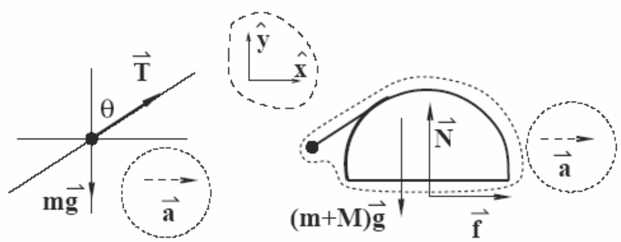
A)[3P] Determine la tensión de la cuerda.

B)[2P] Si el coeficiente de roce (estático y cinético) entre la tortuga y el piso es μ, determine el ángulo θ máximo.

C)[1P] Analice e interprete su resultado en la parte (a) para el caso $\theta \to \pi/2$.



Solución



- Las fuerzas que actúan sobre la carga: tensión $\vec{T}$ y peso $m\vec{g}$. La aceleración $\vec{a}$ es horizontal.
- Ecuación de movimiento y proyecciones según $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{T} + m\vec{g} &= m\vec{a} \qquad \Rightarrow & (1)\\ T\sin\theta &= ma \quad (\text{según } \hat{x}) & (2)\\ T\cos\theta - mg &= 0 \quad (\text{según } \hat{y}) & (3) \end{aligned}$$

- De la ecuacion (3) se obtiene

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

- Podemos despejar la aceleración:

$$\boxed{a = g\tan\theta} \qquad (4)$$

- Para la parte B consideramos "tortuga⊕carga" como UN cuerpo. Las interacciones desde el exterior son: peso $(m+M)\vec{g}$, contacto con el piso (normal $\vec{N}$ y roce $\vec{f}$).
- La ecuacion del movimiento (del cuerpo de masa M+m) y sus proyecciones según $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

$$\begin{aligned} (m+M)\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} &= (m+M)\vec{a} \qquad \Rightarrow & (5)\\ 0 + 0 + f &= (m+M)a \quad (\text{según } \hat{x}) & (6)\\ -(m+M)g + N + 0 &= 0 \quad (\text{según } \hat{x}) & (7) \end{aligned}$$

- Tracción a punto de resbalar (ó resbalando)$\Rightarrow f = \mu N \Rightarrow \boxed{a = \mu g}$; combinando con resultado para la aceleración $\boxed{a = g\tan\theta)}$ se obtiene:

$$g\tan\theta = \mu g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta_{max} = \mu},$$

que determina el ángulo máximo θ_{max}.

- En el caso $\theta \to \pi/2$ se ve que $T = \frac{mg}{\cos\theta} \to \infty$. O sea, si la cuerda queda horizontal la tensión es infinitamente grande. Ello ocurre si la tortuga pudiese acelerar infinitamente (necesitaría zapatillas de atletismo!).

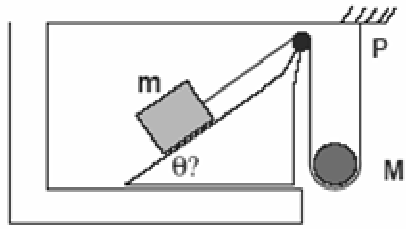
DINAMICA V

En la figura se muestra un cubo de masa m posando sobre una cuña; esta última yace sobre una superficie horizontal pulida. El cubo es atado mediante una cuerda ideal a una estructura fija en P. La cuerda es tensada mediante una carga colgante de masa M. Todos los contactos ocurren sin fricción. La configuración es tal que la cuña no se mueve.

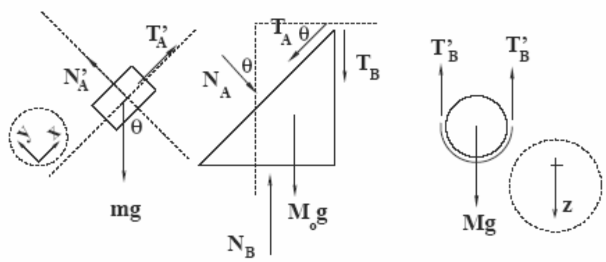
A)[2P] Construya los diagramas de cuerpo libre para el bloque, la cuña y la carga.

B)[2P] Calcule el ángulo θ de la cuña para que ésta se mantenga en reposo.

C)[2P] Calcule la aceleración del cubo e interprete su resultado.



Solución



• Sobre el cubo actúan tension de la cuerda $\vec{T}'_A$ (de magnitud T), el peso del cubo $m\vec{g}$ y la normal de la cuña sobre el cubo N'_A (magnitud N). Ecuación del movimiento (considerando aceleración $\vec{a}_c$ de componente según el plano a) y proyecciones:

$$
\begin{aligned}
& \vec{T}'_A + m\vec{g} + N'_A &=& \; m\vec{a}_c \qquad \Rightarrow & (8)\\
\text{Según } \hat{x}) \quad & T - mg\sin\theta + 0 &=& \; ma \quad \rightarrow \quad T - mg\sin\theta = ma & (9)\\
\text{Según } \hat{y}) \quad & 0 - mg\cos\theta + N &=& \; 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\theta & (10)
\end{aligned}
$$

• Sobre la cuña actúan el contacto con el cubo (normal $\vec{N}_A$ de magnitud N), la cuerda en el canto de la cuña (tensiones $\vec{T}_A$ oblicua y $\vec{T}_B$ vertical, ambas de magnitud T), gravedad sobre la cuña ($M_\circ\vec{g}$), y normal con el piso ($\vec{N}_B$ de magnitud N_B. Ecuación del movimiento (reposo) y proyección según la horizontal:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}_A + \vec{T}_A + \vec{T}_B + M_\circ\vec{g}\vec{N}_B &= 0 \qquad \Rightarrow & (11)\\
-N\sin\theta + T\cos\theta + 0 + 0 + 0 &= 0 \qquad \rightarrow T\cos\theta = N\sin\theta & (12)
\end{aligned}
$$

• Sobre la carga (y pedazo de cuerda en contacto con ella) actúan la tensión $\vec{T}'_B$ en ambas puntas (magnitud T) y el peso de la carga ($M\vec{g}$); la aceleración de la carga es $\vec{a}_\circ$ de magnitud $a/2$. La ecuación del movimiento y proyección según z:

$$\begin{aligned} \vec{T}'_B + \vec{T}'_B + M\vec{g} &= M\vec{a}_\circ \qquad \Rightarrow && (13) \\ -2T + Mg &= M(a/2) \qquad \rightarrow 2Mg - 4T = Ma && (14) \end{aligned}$$

• Buscamos ángulo θ. Primero usar Ec. 10 para N en Ec. 12 ...

$$T\cos\theta = (mg\cos\theta)\sin\theta \quad \rightarrow \quad T = mg\sin\theta \tag{15}$$

• Sustituir este valor para T en Ec. 9 para T ...

$$(mg\sin\theta) - mg\sin\theta = ma \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 0}. \tag{16}$$

• Reemplazar $a = 0$ y $T = mg\sin\theta$ en Ec. 14 ...

$$2Mg - 4(mg\sin\theta) = m0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin\theta = \frac{M}{2m}} \tag{17}$$

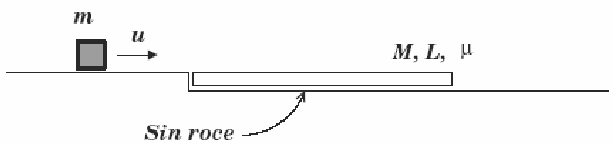
• Caso $\theta \sim \pi/2 \Rightarrow \sin\theta \sim 1 \Rightarrow M \sim 2m$. Este caso corresponde a bloque suspendido por carga en polea. En tal caso la aceleración nula sólo es compatible con $M \sim 2m$.

DINAMICA VI

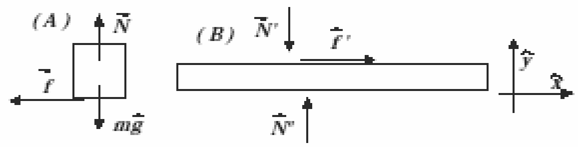
PROBLEMA 2: En presencia de gravedad un bloque pequeño de masa $\underline{m}$ resbala con rapidez constante $\underline{u}$ sobre un piso que empalma suavemente con un tablón en reposo de masa $\underline{M}$ y longitud $\underline{L}$. El tablón posa a su vez sobre una superficie horizontal muy resbalosa. La cara superior del tablón es rugosa y su coeficiente de roce cinético con el bloque es $\underline{\mu}$. La velocidad u es tal que el bloque alcanza a resbalar en toda la extensión del tablón.

A) [6Pt] Determine el desplazamiento del tablón al momento en que el bloque llega a su extremo delantero.

B) [1Pt] En base a su resultado identifique la rapidez mínima del bloque para llegar al extremo delantero del tablón: interprete su resultado.



Solución



- Determinamos las aceleración del bloque ($\vec{a}$) y la del tablón ($\vec{b}$).
- Sobre el bloque actúan: Contacto (normal $\vec{N}$ + roce $\vec{f}$) y gravedad ($m\vec{g}$). Newton: $\vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Proyectando según componentes (y,x) y resolviendo:

$$\left.\begin{array}{ll} y) & N + 0 - mg = 0 \\ x) & 0 - f + 0 = ma_x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{N = mg}} \\ \underline{\underline{a_x = -\mu g}} \end{array}\right. \tag{1}$$

- Sobre el tablón actúan: Contacto normal con bloque $\vec{N}'$ (mg); contacto tangencial con bloque $\vec{f}'$ (μmg); gravedad $M\vec{g}$ (Mg) y contacto con el piso $\vec{N}$" (N"). Newton: $\vec{N}' + \vec{f}' + M\vec{g} + \vec{N}" = M\vec{b}$. Proyectando según componentes (y,x) y resolviendo:

$$\left.\begin{array}{ll} y) & -mg + 0 - Mg + N" = 0 \\ x) & +\mu mg + 0 + 0 = Mb_x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{N" = (m+M)g}} \\ \underline{\underline{b_x = +\mu g \frac{m}{M}}} \end{array}\right. \tag{2}$$

- Con estas aceleraciones determinamos las coordenadas del bloque (x_b) y la punta del tabón (x_T) considerando inicialmente: bloque con rapidez u y tablón detenido. Entonces

$$\begin{aligned} x_b &= 0 + ut - \frac{1}{2}\mu g t^2 \\ x_T &= L + 0 + \frac{1}{2}\mu g \frac{m}{M} t^2 \end{aligned}$$

- Encuentro: $x_b(t) = x_T(t) \Rightarrow$

$$ut - \frac{1}{2}\mu g t^2 = L + \frac{1}{2}\mu g \frac{m}{M} t^2 \quad \Rightarrow \quad \mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right) t^2 - 2ut + 2L = 0$$

Denotando $A = \mu g(1 + m/M)$ y resolviendo (y simplificando) el instante $\bar{t}$ de encuentro:

$$\bar{t} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2AL}}{A}$$

De las dos soluciones tomamos la menor de las positivas (primer encuentro a $t > 0$). Así, el desplazamiento Δx_T de la punta del tabón es:

$$\Delta x_T = \frac{1}{2}\mu g \frac{m}{M} \bar{t}^2 = \frac{\mu g m}{2M}\left\{\frac{u - \sqrt{u^2 - 2AL}}{A}\right\}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x_T = \frac{\mu g m}{MA^2}\left(u^2 - AL - u\sqrt{u^2 - 2AL}\right)}$$

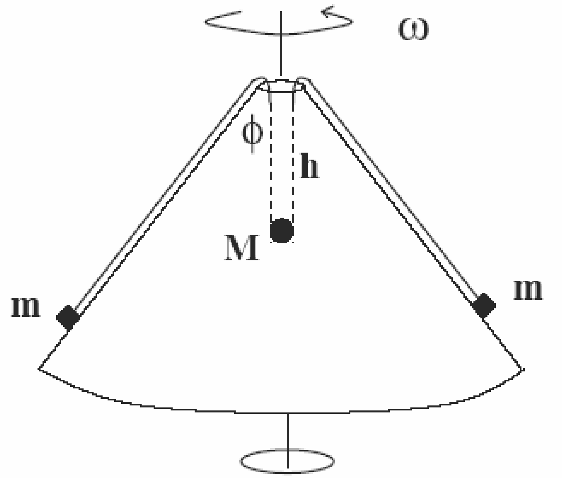
- La rapidez u mínima posible es para la cual existe un instante de llegada al extremo delantero. Se observa el término dentro de la raiz cuadrada para $\bar{t}$ y exigimos $u^2 - 2AL = 0$, por lo tanto $u^2 = 2\mu g(1 + m/M)L$. Su forma es del tipo $u^2 = 2a_{rel}L$.

DINAMICA VII

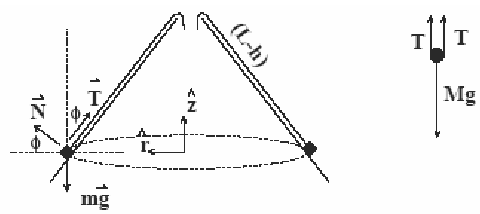
En la figura se muestra dos cubos pequeños e idénticos de masa m unidos por una cuerda ideal de longitud $2L$. El sistema se dispone simétricamente sobre una superficie cónica con un orificio de canto suave en su punta superior. La cuerda entra parcialmente por el orificio y es tensada mediante una carga de masa M la cual no se mueve verticalmente. El cono y los cubos rotan conjuntamente con velocidad angular ω constante; estos últimos describen movimientos circunferenciales y se mantienen en contacto con el cono. El ángulo que forma la vertical con una directriz del cono es ϕ. Considere el orificio y la carga de dimensiones muy pequeñas.

A)[4Pt] Determine la profundidad h de la carga con respecto a la punta del cono que permite la situación descrita.

B)[2Pt] Determine el rango de M a objeto de que el sistema descrito sea físicamente factible.



Solución



- Fuerzas sobre la carga (y pedazo de cuerda adherido): dos tensiones ($2T$; hacia arriba) y peso (Mg; hacia abajo). La carga no se mueve por lo tanto $\boxed{2T = Mg}$
- Estudiamos uno de los cubos en movimiento circunferencial de radio $r = (L-h)\sin\phi$.
- Fuerzas actuando sobre los cubos: Peso (mg; hacia abajo), normal (N; $\perp$ superficie) y tensión de la cuerda (T; según superficie); la aceleración ($\omega^2 r$, centrípeta).
- Ecuación del movimiento y proyecciones según $\hat{r}$ y $\hat{z}$:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$0 + N\cos\phi - T\sin\phi = -m\omega^2(L-h)\sin\phi \qquad \text{según } \hat{r} \qquad (1)$$

$$-mg + N\sin\phi + T\cos\phi = 0 \qquad \text{según } \hat{z} \qquad (2)$$

DINAMICA VIII

PROBLEMA 3: Mediante la acción de fuerzas externas, una piedra de masa $\underline{m}$ es ayudada a moverse en trayectoria circunferencial de radio $\underline{R}$. Mediante un sensor adecuado se observa que la magnitud de la fuerza radial crece proporcionalmente con el cuadrado del tiempo, $|F_r| = Gt^2$, con $\underline{G}$ una constante positiva conocida.
- [3Pt] Determine la aceleración angular experimentada por la piedra.
- [3Pt] Si la piedra está inicialmente en reposo, determine el tiempo que ésta tarda en dar la primera vuelta.

Solución

- Utilizar Ec. 2 para despejar N ($N = (mg - T\cos\phi)/\sin\phi$) y sustituir en 2:

$$\left(\frac{mg - T\cos\phi}{\sin\phi}\right)\cos\phi - T\sin\phi = -m\omega^2(L-h)\sin\phi$$

- Limpiando:

$$T - mg\cos\phi = m\omega^2(L-h)\sin^2\phi \tag{3}$$

- Despejamos h sustituyendo valor de T:

$$\boxed{h = L - \frac{Mg/2 - mg\cos\phi}{m\omega^2\sin^2\phi}}$$

- Condiciones para M. Notar que los cubos <u>deben</u> estar en contacto con el cono. Por lo tanto la fza normal debe ser positiva: $N \geq 0$. De la solución para N se tiene

$$N = (mg - T\cos\phi)/\sin\phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad mg \geq T\cos\phi \quad \rightarrow \quad \boxed{M \leq m/\cos\phi}$$

- Hay otra condición que emana de Ec. 3: $(L-h) \geq 0 \Rightarrow$

$$T - mg\cos\phi = m\omega^2(L-h)\sin^2\phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad T - mg\cos\phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{M \geq m\cos\phi}$$

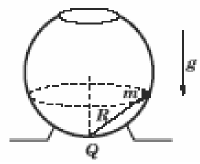
- Resumimos: $\boxed{m\cos\phi \leq M \leq m/\cos\phi}$
- Tambien notar que $h \geq 0$, por lo tanto

$$h = L - \frac{Mg/2 - mg\cos\phi}{m\omega^2\sin^2\phi} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad L \geq \frac{Mg/2 - mg\cos\phi}{m\omega^2\sin^2\phi} \quad \Rightarrow$$

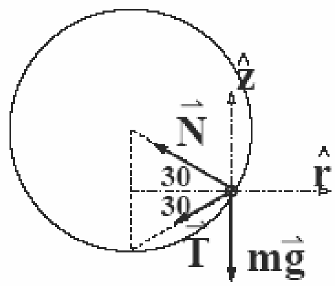
$$\boxed{M \leq 2m\left(\left(\frac{\omega^2 L}{g}\right)\sin^2\phi + \cos\phi\right)}$$

DINAMICA IX

$\boxed{2}$ Al interior de un recipiente esférico de radio $\underline{R}$ y sin roce una bolita de masa $\underline{m}$ mantiene un movimiento circunferencial uniforme de velocidad angular $\underline{\omega}$. La bolita permanece atada por una cuerda ideal de longitud R, cuyo otro extremo está fijo al fondo Q del recipiente. La aceleración de gravedad local es $\underline{g}$, y la velocidad angular es lo suficientemente grande como para mantener tensa la cuerda. • Determine la tensión de la cuerda.



Solución



• Sobre la bolita actúan su peso ($m\vec{g}$), la cuerda ($\vec{T}$) y el contacto con la superficie ($\vec{N}$). El movimiento es crcunferencial de radio $R\cos 30°$ y aceleración angular de magnitud $\omega^2 R\cos 30°$. La ecuación del movimiento y proyecciones según $\hat{r}$ y $\hat{z}$ (se usa que $\sin 30°{=}1/2$):

$$\begin{aligned}
m\vec{g}+\vec{T}+\vec{N} &= m\vec{a} \\
\text{según } \hat{z} \qquad -mg - T\sin 30° + N\sin 30° &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{N-T=2mg}} \qquad (5) \\
\text{según } \hat{r} \qquad 0 - T\cos 30° - N\cos 30° &= -m\omega^2 R\cos 30° \\
&\Rightarrow \underline{\underline{T+N=m\omega^2 R}} \qquad (6)
\end{aligned}$$

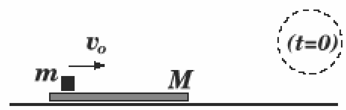
• Combinando las ecuaciones (5) y (6) para despejar T se obtiene:

$$\underline{\underline{T=m(\omega^2 R/2-g)}}$$

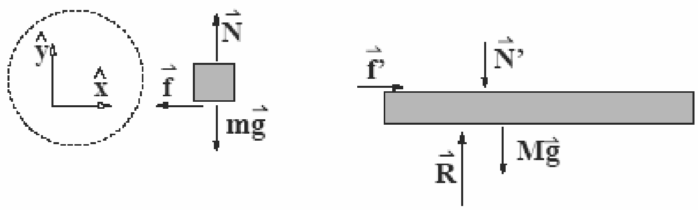
DINAMICA X

$\boxed{1}$ Un tablón de masa $\underline{M}$ yace en reposo sobre un piso horizontal sin roce. Un bloque de masa $\underline{m}$ posa sobre el tablón. El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el tablón es $\underline{\mu}$. Súbitamente se hace resbalar el bloque sobre el tablón mediante un golpe seco el cual le imprime una rapidez inicial $\underline{v_\circ}$. Por efecto de la fricción mutua el bloque arrastra al tablón en tanto que el tablón frena al bloque.

- [4Pts] Determine el lapso que dura el bloque resbalando sobre el tablón.
- [2Pts] Determine la rapidez terminal del sistema bloque–tablón.



Solución



- Aislamos los dos objetos: bloque y tablón. Las fuerzas actuando sobre el bloque son su peso ($m\vec{g}$), fuerza normal ($\vec{N}$) y roce con el tablón ($\vec{f} = -\mu N\hat{x}$). Llamemos $\vec{a}_1 = a_{1x}\hat{x}$ la aceleración del bloque. La ecuación del movimiento y proyecciones según x e y:

$$\begin{array}{lrcll} & m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} & = & m\vec{a}_1 & \\ \text{según y} & -mg + N + 0 & = & 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{N = mg} & (1) \\ \text{según x} & 0 + 0 - \mu N & = & ma_{1x} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{1x} = -\mu g} & (2) \end{array}$$

- Las fuerzas actuando sobre el tablón son su peso ($M\vec{g}$), contacto con el bloque ($\vec{f}' = -\vec{f}$ y $\vec{N}' = -\vec{N}$), y contacto con el piso ($\vec{R}$). Llamemos $\vec{a}_2 = a_{2x}\hat{x}$ la aceleración del tablón:

$$\begin{array}{lrcll} & M\vec{g} + \vec{N}' + \vec{f}' + \vec{R} & = & M\vec{a}_2 & \\ \text{según y} & -Mg - mg + 0 + R & = & 0 & \\ \text{según x} & 0 + 0 + \mu mg + 0 & = & Ma_{2x} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{2x} = \mu \frac{m}{M} g} & (3) \end{array}$$

- Dadas las aceleraciones tenemos las velocidades. El bloque parte con rapidez $v_\circ$ y tiene aceleración a_{1x}. El tablón parte del reposo y tiene aceleración a_{2x}. Dejan de resbalar cuando las velocidades igualan:

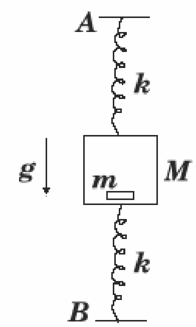
$$\begin{array}{rcll} v_1 & = & v_\circ - \mu g t & \\ v_2 & = & \mu (m/M) g t & \\ v_1 & = & v_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t \rightarrow t^* = \dfrac{v_\circ}{\mu g(1 + m/M)}} & (4) \end{array}$$

- La velocidad terminal:

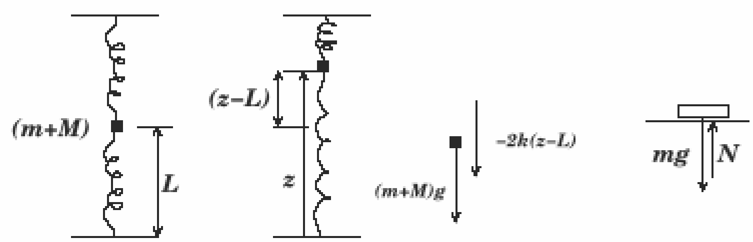
$$v^* = \mu(m/M)gt^* \rightarrow \boxed{v^* = mv_\circ/(m + M)}$$

DINAMICA XI

PROBLEMA 5: Una caja de masa $\underline{M}$ es sostenida por dos resortes idénticos de constante elástica $\underline{k}$. El sistema se dispone verticalmente en presencia de la gravedad terrestre $\underline{g}$ como se ilustra en la figura. La separación entre los extremos A y B de los resortes es tal que cuando la caja se ubica en el punto medio los resortes no sufren elongación. Dentro de la caja se hace posar una moneda de masa $\underline{m}$ y el sistema se deja oscilando. Determine la amplitud máxima de las oscilaciones que garantice que la moneda nunca pierda contacto con la caja.



Solución



SINOPSIS: El tamaño de la caja es irrelevante. Analizamos el par caja+moneda como un solo objeto y determinamos su comportamiento oscilatorio. Luego analizamos la moneda como un solo objeto y exigimos que la normal del piso sobre ella nunca se anule.

• Consideremos los resortes de longitud natural L, una magnitud que eventualmente debiera desaparecer de nuestro resultado. Siguiendo el esquema de la figura (vector $\hat{z}$ hacia arriba), las fuerzas sobre la (caja+moneda) son el peso ($(m+M)\vec{g}$) y la fuerza de ambos resortes ($\vec{F}_e = -2k(z-L)\hat{z}$). Aplicando Newton y proyectando según $\hat{z}$ tenemos:

$$(m+M)\vec{g} + \vec{F}_e = (M+m)\vec{a} \rightarrow -(m+M)g - 2k(z-L) = (M+m)\ddot{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{2k}{m+M}z + g - \frac{2kL}{m+M} = 0} \qquad (6)$$

• La ubicación z de equilibrio se puede determinar exigiendo $\ddot{z} = 0$, con lo cual $\boxed{z_\circ = L - (m+M)g/2k}$

Analizamos la moneda por si sola. Sobre ella actúan la gravedad ($m\vec{g}$) y la normal ($\vec{N}$). La ecuación del movimiento y su proyección según $\hat{z}$ llevan a

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{-mg + N = m\ddot{z}}$$

• Sustituyendo valor de $\ddot{z}$ de la Ec. 6 obtenemos

$$N + \frac{2km}{m+M}z - \frac{2kLm}{m+M} = 0$$

La pérdida de contacto ocurre cuando $N = 0$, con lo cual $\frac{2km}{m+M}z = \frac{2kLm}{m+M}$. Despejando z se tiene

$$z = L$$

• Las oscilaciones ocurren en torno a la posición de equilibrio. La amplitud es la resta $z - z_\circ$ (que con la elección de ejes es positiva). Por lo tanto la amplitud máxima A para que nunca se despegue la moneda es

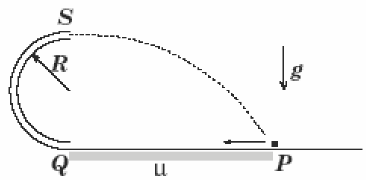
$$\boxed{A = z - z_\circ = (m+M)g/2k}$$

CONSERVACION DE LA ENERGIA I

PROBLEMA 1: En la figura se ilustra una superficie horizontal rugosa que empalma suavemente en Q con un tubo semicircular pulido de radio $\underline{R}$. Un cubo pequeño de masa no nula es lanzado desde P sobre la superficie, penetra por el tubo, y emerge desde su extremo superior S hasta caer sobre el pundo de partida P. La longitud del tramo rugoso $\overline{PQ}$ es $\underline{D}$ y el coeficiente de roce cinético (dinámico) con el cubo es $\underline{\mu}$.

A) [6Pt] Determine la rapidez con que debe partir el cubo para que lo descrito sea posible.

B) [1Pt] Analice e interprete su resultado para el caso $D \sim 0$.



Solución

• Determinemos la velocidad que el cubo debe tener en $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{v_c}$) a fin de caer en $\boldsymbol{P}$. Movimient parabólico con origen (xy) de la figura. Para esta etapa se toma $\boldsymbol{t = 0}$ a la salida de $\boldsymbol{S}$; $\boldsymbol{t^*}$ es instante de llegada al suelo:

$$x = v_c t \quad \rightarrow \quad D = v_c t^* \qquad (1$$

$$y = 2R - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad 0 = 2R - \frac{1}{2} g t^{*2} \qquad (2$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos para $\boldsymbol{v_c}$:

$$v_c^2 = \frac{gD^2}{4R}$$

• Por trabajo-energía podemos relacionar $\boldsymbol{v_c}$ con la velocidad de partida $\boldsymbol{v_p}$. Suponemos cubo d masa $\boldsymbol{m}$. Si $\boldsymbol{E}$ representa la energía mecánica total del cubo, entonces:

$$E_S = E_P + W_{P \rightarrow S}(roce) + W_{P \rightarrow S}(normal)$$

• El trabajo debido al roce sobre el cubo es $-\boldsymbol{\mu m g D}$; el trabajo debido a la fuerza normal sob el cubo es nulo (el piso no se mueve). Por lo tanto:

$$E_S = E_P - \mu m g D$$

• Considerando energía potencial gravitacional en el piso:

$$\left[\frac{1}{2} m v_c^2 + mg(2R)\right] = \left[\frac{1}{2} m v_p^2 + 0\right] - \mu m g D$$

• Sustituir valor encontrado para $\boldsymbol{v_c}$ y despejar:

$$v_p^2 = g\left(\frac{D^2}{4R} + 4R + 2\mu D\right)$$

• El caso extremo $\boldsymbol{D \sim 0}$ lleva a

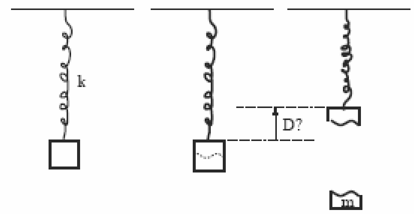
$$v_p^2 \approx g4R \sim 2g \times \text{"altura"} \ ,$$

resultado conocido para que el cubo alcance a penas el extremo $\boldsymbol{S}$, y caiga verticalmente.

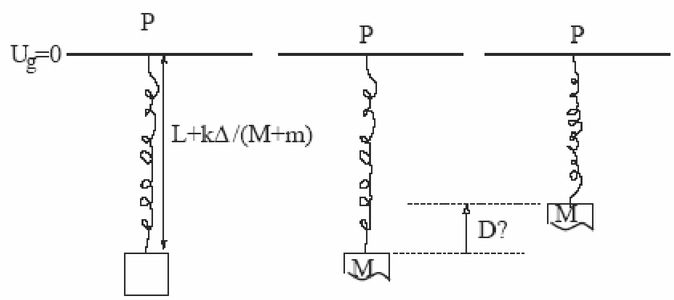
CONSERVACION DE LA ENERGIA II

1 **En presencia de la gravedad terrestre $\underline{g}$, un bloque cuelga inmóvil del techo mediante un resorte de masa nula y constante elástica $\underline{k}$. En cierto instante una porción del bloque, de masa $\underline{m}$, se desprende y el remanente adherido al resorte comienza a subir.**

- **Determine la distancia D subida por el remanente hasta detenerse por primera vez.**



Solución



- Sean L la longitud natural del resorte y $(M+m)$ la masa total del bloque; en la situació estática la elongación del resorte es $\Delta = (M+m)g/k$.
- Conservamos energía para el 'resorte $\oplus$ trozo adherido' de masa M. El nivel cero de energí potencial gravitacional se toma en P.
- Energía inicial: $E_i = K + U_g + U_e = 0 - Mg(L+\Delta) + \frac{1}{2}k\Delta^2$
- Energía final: $E_f = K + U_g + U_e = 0 - Mg(L+\delta) + \frac{1}{2}k\delta^2$
- Conservación $E_i = E_f \to$ ecuación cuadrática para δ:

$$\frac{1}{2}k\delta^2 - Mg\delta + \left(Mg\Delta - \frac{1}{2}k\Delta^2\right) = 0$$

- Despejamos δ:

$$\delta = \frac{Mg \pm \sqrt{(Mg)^2 - 4\frac{1}{2}k(Mg\Delta - \frac{1}{2}k\Delta^2)}}{k} = \frac{Mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 - 2\left(\frac{Mg}{k}\right)\Delta + \Delta^2}$$

- Simplificando y reemplazando $\Delta = (m+M)g/k$:

$$\delta = \frac{Mg}{k} \pm \left|\frac{Mg}{k} - \Delta\right| \to \frac{Mg}{k} - \frac{mg}{k}$$

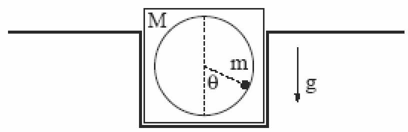
- El ascenso lo podemos escribir $D = y_f - y_i = (-L-\delta) - (-L-\Delta) = \Delta - \delta \to$

$$D = \frac{(M+m)g}{k} - \frac{Mg}{k} + \frac{mg}{k} \to \boxed{D = \frac{2mg}{k}}$$

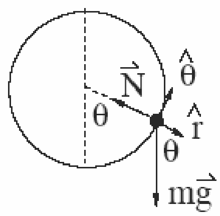
CONSERVACION DE LA ENERGIA III

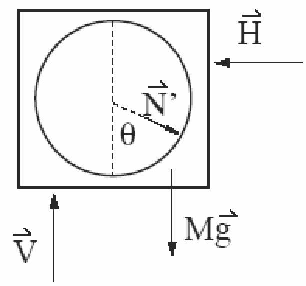
3 **Un cubo de masa $\underline{M}$ tiene un hueco esférico de radio $\underline{R}$; el cubo descansa en un orificio de superficies rectas y sin roce. Al interior del cubo hay una bolita de masa $\underline{m}$ que gira sin ayuda externa en un trayecto circunferencial que pasa por el punto más bajo del hueco. En tal punto la bolita tiene una rapidez $\underline{v_\circ}$.**

- **Calcule la fuerza de contacto bolita–superficie en función del ángulo θ medido con respecto a la vertical.**
- **Determine el rango de $v_\circ$ que garantice que la bolita nunca pierda contacto con la superficie, ni el cubo pierda contacto con el fondo del orificio.**



Solución





- En el movimiento de la bolita intervienen el peso ($m\vec{g}$) y el contacto normal ($\vec{N}$). El movimiento es circunferencial y la aceleración (en polares) es $\vec{a} = -(v^2/R)\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$. La ecuación vectorial de movimiento y proyecciones según $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$:

$$\begin{array}{llcl}
\texttt{vectorial} & m\vec{g} + \vec{N} & = & m\left[-(v^2/R)\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}\right] \\
\text{según } \hat{\theta} & -mg\sin\theta + 0 & = & ma_\theta \\
\text{según } \hat{r} & mg\cos\theta - N & = & -m\dfrac{v^2}{R} \quad \to \boxed{N = m\dfrac{v^2}{R} + mg\cos\theta}
\end{array} \tag{4}$$

- Conservación de energía entre el punto más bajo ($U_g = 0$) y ubicación θ:

$$\frac{1}{2}mv_\circ^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) \qquad \to \qquad v^2 = v_\circ^2 - 2gR(1-\cos\theta)$$

- Sustituyendo en expresión para N (Ec. 4) y simplificando:

$$\boxed{N = \frac{mv_\circ^2}{R} - 2mg + 3mg\cos\theta} \tag{5}$$

- Para que la bolita se mantenga en contacto y no levante el cubo implica exigir que en el punto más alto ($\theta = \pi$) la normal cumpla $0 \leq N \leq Mg$, o sea

$$0 \leq \frac{mv_\circ^2}{R} - 2mg - 3mg \leq Mg \qquad \to \qquad \boxed{5gR \leq v_\circ^2 \leq \left(5 + \frac{M}{m}\right)gR}$$

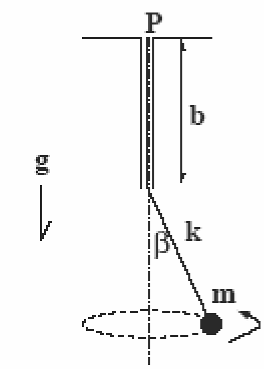
CONSERVACION DE LA ENERGIA IV

En la figura se muestra una bolita de masa m en movimiento circunferencial horizontal. La bolita pende mediante un elástico de un soporte fijo en P. El elástico (de longitud natural L y constante elástica k) se mantiene parcialmente dentro de un tubo vertical de longitud b ($b < L$); el ángulo que forma la vertical con la porción de elástico fuera del tubo es β.

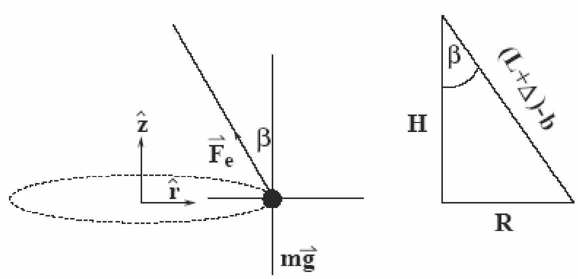
A)[3Pt] Calcule la velocidad angular de la bolita.

B)[2Pt] Calcule la energía mecánica total del sistema considerando el nivel cero de energía potencial gravitacional aquel que toma la bolita cuando cuelga sin moverse.

C)[1Pt] Analice e interprete su resultado en la parte (a) para el caso de un elástico muy rígido (k muy grande) y $\beta \to \pi/2$.



Solución



- Considerando la bolita como el objeto a estudiar, las fuerzas sobre ésta son: fuerza del elástico ($\vec{F}_e$; magnitud $k\Delta$) y el peso $m\vec{g}$. Ecuación de movimiento y proyecciones según $\hat{r}$ y $\hat{z}$:

$$\begin{aligned} \vec{T} + m\vec{g} &= m\vec{a} \qquad \Rightarrow & (18)\\ -k\Delta \sin\beta &= -m\omega^2 R \quad \text{(según } \hat{r}\text{)} & (19)\\ k\Delta\cos\beta - mg &= 0 \quad \text{(según } \hat{z}\text{)} & (20) \end{aligned}$$

- R es el radio de la órbita. El tramo de elástico fuera del tubo es $L + \Delta - b$; el radio es $(L + \Delta - b)\sin\beta$. Sustituyendo en las ecuaciones 19 y 20 se tiene

$$\begin{aligned} k\Delta &= m\omega^2(L + \Delta - b) & (21)\\ k\Delta\cos\beta &= mg & (22) \end{aligned}$$

- Combinando estas dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{mg/\cos\beta}{m(L + mg/k\cos\beta - b)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{g}{(L-b)\cos\beta + mg/k}} \qquad (23)$$

• Para la energía mecánica total $\boldsymbol{E}$ consideramos: $\boldsymbol{E = K + U_g + U_e}$

• Energía cinética $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 = \frac{1}{2} mg \left[(L-b)\cos\beta + \frac{mg}{k} \right] \tan^2\beta} \tag{24}$$

• Energía elástica $\boldsymbol{U_e}$: Utilizando $\boldsymbol{\Delta = mg/k \cos\beta}$,

$$\boldsymbol{U_e = \frac{1}{2} k\Delta^2 = \frac{1}{2} mg \left(\frac{mg}{k} \right) \frac{1}{\cos^2\beta}} \tag{25}$$

• Energía gravitacional $\boldsymbol{U_g}$ Sea $\boldsymbol{H}$ la profundidad de la bolita c/r boca del tubo y $\boldsymbol{H_\circ}$ la misma profundidad pero con bolita colgando, entonces:

$$\boldsymbol{H = (L + \Delta - b)\cos\beta} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{H_\circ = (L + \Delta_\circ - b) = (L + mg/k - b)}\ , \tag{27}$$

Con ésto la energía gravitacional es

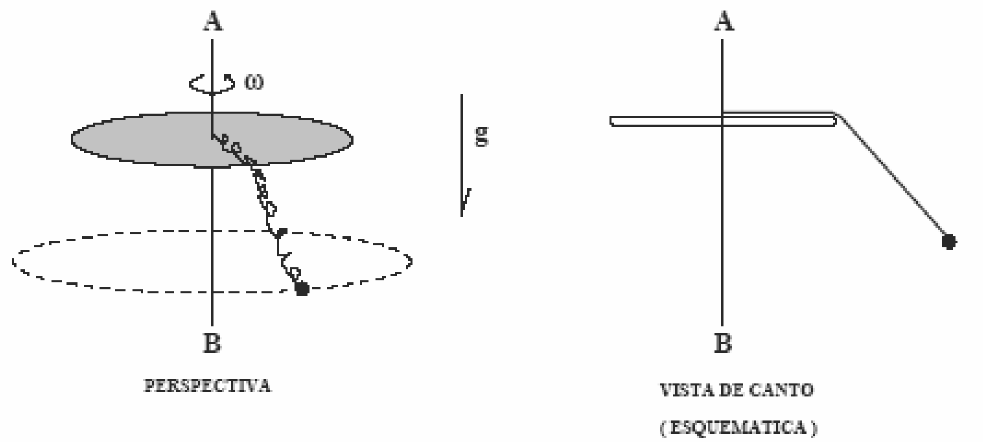
$$\boldsymbol{U_g = -mg(L + \Delta - b)\cos\beta + mg(L + mg/k - b) = mg(L-b)(1-\cos\beta)} \tag{28}$$

• Si $\boldsymbol{k \to \infty}$ entonces la velocidad angular $\boldsymbol{\omega^2 \to g/(L-b)\cos\beta}$; si además $\boldsymbol{\beta \to \pi/2}$ entonces $\boldsymbol{\omega^2 \to \infty}$. Se trata entonces de una cuerda ideal que para estar horizontal debe rotar con velocidad angular infinita.

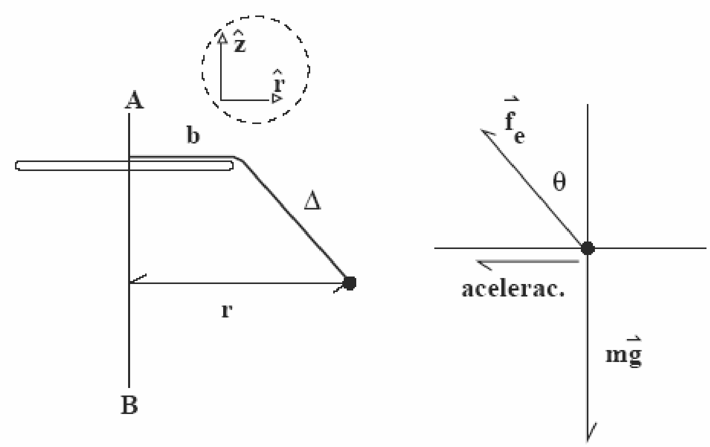
CONSERVACION DE LA ENERGIA V

En la figura se muestra un plato (de canto suave) de radio $\underline{b}$ que gira con velocidad angular $\underline{\omega}$ en torno a su eje vertical AB. Un elástico de constante elástica $\underline{k}$ y longitud natural $\underline{b}$ permanece unido en uno de sus extremos al eje de rotación del plato. Del otro extremo cuelga una bolita de masa $\underline{m}$. El conjunto gira con velocidad angular $\underline{\omega}$, con la bolita colgando del elástico describiendo una trayectoria circunferencial. No hay fricción entre el elástico y el plato.

Calcule la energía del sistema resorte–bolita considerando como nivel cero de energía potencial gravitacional la altura del plato.



Solución



PUNTUACION: DCL correcto 1Pto

- **La bolita colgando mientras rota experimenta un movimiento circunferencial. El radio r de la órbita está dada por $r = b + \Delta \sin\theta$, con Δ la elongación del elástico, y θ la inclinación del tramo flectado c/r a la vertical.**

• **La energía del sistema:**

$$E = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 - mg\Delta\cos\theta + \frac{1}{2}k\Delta^2 \tag{23}$$

PUNTUACION: expresión correcta para la energía 1Pto

• **Se necesitan Δ y θ. Para ello aplicamos Newton :**
• **Newton:**

$$\vec{f_e} + m\vec{g} = m\vec{a} \tag{24}$$

• **Proyectando según $\hat{z}$ (vertical) y $\hat{r}$ (radial), y considerando la aceleración $\vec{a}$ de magnitud $\omega^2 r$ apuntando hacia el centro de la órbita, y la fuerza del resorte de magnitud $k\Delta$:**

$$k\Delta\cos\theta - mg = 0 \tag{25}$$

$$-k\Delta\sin\theta + 0 = -m\omega^2(b + \Delta\sin\theta) \tag{26}$$

• **Hay que obtener Δ y θ. Las ecuaciones de arriba se reacomodan:**

$$k\Delta\cos\theta = mg \tag{27}$$

$$(k - m\omega^2)\Delta\sin\theta = m\omega^2 b \tag{28}$$

$$\Delta\cos\theta = \frac{m}{k}g \tag{29}$$

$$\Delta\sin\theta = \frac{m\omega^2 b}{(k - m\omega^2)} = \frac{m}{k}\frac{\omega^2 b}{1 - m\omega^2/k} \tag{30}$$

• **De aqui se obtienen Δ y $\tan\theta$. Definiendo**

$$\omega_\circ^2 = \frac{k}{m} \tag{31}$$

• **Combinando las Ecs. (29) y (30):**

$$\Delta^2 = \left(\frac{m}{k}\right)^2 \left[g^2 + \left(\frac{\omega^2 b}{1 - \omega^2/\omega_\circ^2}\right)^2\right] \tag{32}$$

$$\tan\theta = \left(\frac{1}{g}\right)\frac{\omega^2 b}{1 - \omega^2/\omega_\circ^2} \tag{33}$$

• **La energía:**

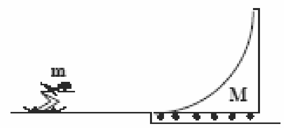
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(b + \Delta\sin\theta)^2 - mg\Delta\cos\theta + \frac{1}{2}k\Delta^2 \tag{34}$$

• **Las ecuaciones (29) y (30) para $\Delta\sin\theta$ y $\Delta\cos\theta$, además de Ec. (32) para Δ^2 determinan todos los términos necesarios para evaluar E.**

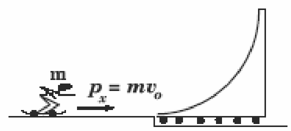
CONSERVACION DE LA ENERGIA VI

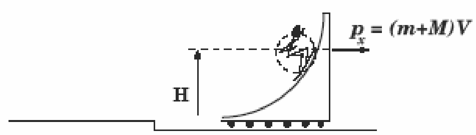
3 En presencia de la gravedad terrestre $\underline{g}$ un 'skater' de masa $\underline{m}$ se aproxima con rapidez $\underline{v_\circ}$ a una rampla lisa de masa $\underline{M}$ en reposo, la cual puede resbalar sin roce sobre el piso horizontal. Para efectos de este problema considere que el 'skater' es muy pequeño con respecto a la rampla, que éste no flecta sus piernas mientras sube por la rampla, y que nunca alcanza el borde superior de la rampla.

- [5Pt] Determine la altura máxima alcanzada por el 'skater' sobre la rampla.
- [1Pt] Examine e interprete su resultado para el caso $M \gg m$.



Solución





- Si el sistema consiste en {skater$\oplus$rampla}, entonces no hay fuerzas externas según la horizontal. Por lo tanto el momentum del sistema según la horizontal se conserva. Además, cuando el skater alcanza el punto más alto éste no se mueve con respecto a la rampla. Por lo tando, en ese instante, su velocidad es igual a la de la rampla (V). Podemos escribir entonces:

$$mv_\circ + 0 = mV + MV \Rightarrow \boxed{V = \frac{mv_\circ}{(m+M)}} \tag{7}$$

- En el sistema no hay fricción, de modo que la energía mecánica total se conserva:

$$\begin{aligned} (K_{\text{skater}} + K_{\text{rampla}} + U_g)_{\text{antes}} &= (K_{\text{skater}} + K_{\text{rampla}} + U_g)_{\text{arriba}} \\ \frac{1}{2}mv_\circ^2 + 0 + 0 &= \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgH \\ &\Rightarrow \boxed{(m+M)V^2 = mv_\circ^2 - mgH} \end{aligned} \tag{8}$$

- Combinando las ecuaciones (7) y (8) despejamos H y obtenemos:

$$\boxed{H = \frac{v_\circ^2}{2g}\left(\frac{M}{m+M}\right)}$$

- En el caso $M \gg m$ entonces

$$H = \frac{v_\circ^2}{2g}\left(\frac{M}{m+M}\right) = \frac{v_\circ^2}{2g}\left(\frac{1}{1+m/M}\right) \to \frac{v_\circ^2}{2g}\ ,$$

resultado conocido cuando objeto de masa arbitraria asciende un plano inclinado sin roce.

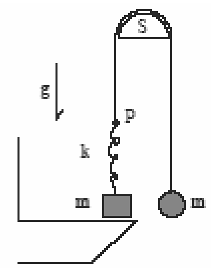
CONSERVACION DE LA ENERGIA VII

En la figura se muestra un cubo de masa m adherido a un resorte ideal, y también una esfera de igual masa unida a una cuerda ideal. El resorte se une a la cuerda en P y la cuerda es sostenida por el soporte S sin fricción. Inicialmente el bloque posa sobre una plataforma horizontal y la esfera se ubica al mismo nivel que el bloque. Se tiene cuidado que el resorte no experimente estiramiento (ni compresión) y la cuerda no se arrugue. La esfera se deja caer (del reposo) y el resorte comienza su estiramiento.

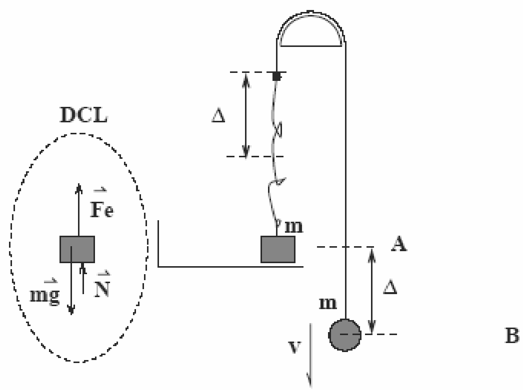
A)[2P] Determine la distancia que ha de descender la esfera hasta que el bloque esté a punto de perder contacto con la plataforma;

B)[3P] determine la rapidez de la esfera en el mismo instante.

C)[1P] Analice e interprete sus resultados en A) y B) para el caso $k \to \infty$.



Solución



- Para determinar levantamiento del cubo considerar fuerzas actuando sobre éste: normal con piso ($\vec{N}$), tiro de resorte ($\vec{F}_e$) y peso ($m\vec{g}$). Bloque detenido $\Rightarrow \vec{N} + \vec{F}_e + m\vec{g} = 0$. Proyectando según vertical hacia arriba:

$$N + k\Delta - mg = 0$$

- A punto de despegarse ($N \to 0$) $\quad \Rightarrow \quad k\Delta = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = mg/k}$.
- Velocidad de esfera en A: utilizar energía.

$$\begin{aligned} E_A &= E_B \\ (K + U_g + U_e)_A &= (K + U_g + U_e)_B \\ 0 + 0 + 0 &= \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta + \frac{1}{2}k\Delta^2 \end{aligned}$$

- Despejar v^2 y sustituir valor de Δ

$$v^2 = 2g\Delta - \frac{k}{m}\Delta^2 = \Delta(2g - \frac{k}{m}\Delta) = g\Delta \Rightarrow \boxed{v = g\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- Si $k \to \infty$ entonces $\Delta \to 0$ y $v \to 0$. Vale decir la esfera al ser soltada ante un resorte rígido no requiere bajar para que el bloque esté a punto de despegarse de la plataforma. Esto siempre y cuendo las masas de ambos cuerpos sean iguales!

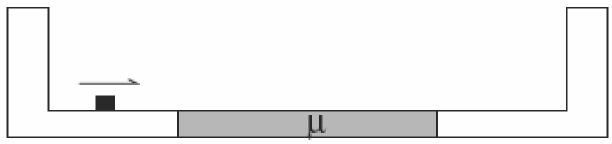
TRABAJO Y ENERGIA I

El bloque de la figura se desliza sobre una superficie horizontal de longitud L y limitada por paredes elásticas verticales en ambos extremos. La superficie cuenta con un tramo rugoso (achurado) de longitud βL ($\beta < 1$) y con roce nulo fuera de él. El coeficiente de roce entre el tramo rugoso y el bloque es μ. El bloque parte desde un extremo con rapidez $v_\circ$.

A)[3P] Determine el tiempo que dura el bloque en movimiento.

B)[2P] Determine donde se detiene el bloque.

C)[1P] Analice e interprete su resultado en A) para el caso $\beta \rightarrow 1$.



Solución

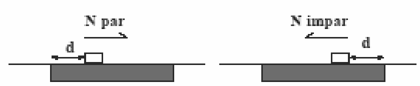
• Resulta útil determinar el número de veces que el bloque pasa por el sector rugoso. Para ello, sea D la distancia neta que desliza el bloque sobre la superficie rugosa. Conservación de energía:

$$K_f - K_i = W(\text{roce}) \qquad \rightarrow \qquad 0 - \frac{1}{2}mv_\circ^2 = -(\mu mg)D \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{D = \frac{v_\circ^2}{2\mu g}}$$

• El número entero de veces que el bloque transita por el sector rugoso es la parte entera de la fracción (desplazamiento neto)/(longitud de tramo rugoso):

$$N = \left[\frac{D}{\beta L}\right] = \left[\frac{v_\circ^2}{2\mu\beta g L}\right]$$

donde '[...]' denota 'parte entera de ...'.



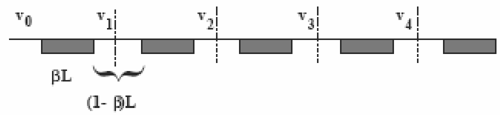
• El lugar donde el bloque queda detenido depende de si N es par ó impar. Para N par (0,2,4,...) la distancia d se mide con respecto al extremo izquierdo del tramo rugoso. Para N impar (1,3,5,...) se mide con respecto al extremo derecho. Para ambos casos

$$d = D - N\beta L \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d = D - \left[\frac{D}{\beta L}\right]\beta L}$$

• El tiempo del movimiento es [t **sobre tramo rugoso**] + [t **sobre tramo liso**]$\equiv t_R + t_L$.
• El lapso sobre el tramo rugoso t_R se puede obtener considerando los sectores rugosos contiguos cubriendo una distancia neta D. Mientras el bloque transita la región rugosa éste frena con aceleración de magnitud μg. El tiempo frenando se obtiene de

$$`v_f = v_i + at' \qquad \rightarrow \qquad 0 = v_\circ - (\mu g)t_R \Rightarrow t_R = \frac{v_\circ}{\mu g}$$

• Necesitamos determinar el lapso sobre tramos sin roce (t_L). Sea v_j la velocidad (cte) en el tramo j-ésimo, de longitud $(1-\beta)L$. El tiempo de tránsito en ese tramo es $t_j = (1-\beta)L/v_j$. El tiempo total t_L es $\sum t_j = (1-\beta)L\sum 1/v_j$. Hay que determinar v_j.



• Consideremos $v_1^2 - v_0^2 = -2\mu(g\beta L) \qquad \Rightarrow \qquad v_1^2 = v_0^2 - [2\mu g\beta L]$ (1er tramo).
• Análogamente $v_2^2 - v_1^2 = -[2\mu g\beta L] \qquad \Rightarrow \qquad v_2^2 = v_0^2 - 2[2\mu g\beta L]$ (2do tramo).
• Se extiende resultado para tramo j:

$$v_j^2 = v_0^2 - j[2\mu g\beta L] \qquad \Rightarrow \quad v_j = v_0\sqrt{1 - j\frac{2\mu g\beta L}{v_0^2}} = v_0\sqrt{1 - j\frac{\beta L}{D}}$$

• Por lo tanto

$$t_L = \sum t_j = (1-\beta)L\sum\frac{1}{v_j} \qquad \Rightarrow t_L = \frac{(1-\beta)L}{v_\circ}\sum_{j\leq N}\frac{1}{\sqrt{1-j\beta L/D}}$$

• Se debe considerar el tránsito hacia el tramo rugoso por primera vez ($t_\circ$):

$$t_\circ = \frac{(1-\beta)L/2}{v_\circ}$$

• El tiempo total $T = t_\circ + t_R + t_L$ da

$$T = \frac{(1-\beta)L}{2v_\circ} + \frac{v_\circ}{\mu g} + \frac{(1-\beta)L}{v_\circ}\sum_{j\leq N}\frac{1}{\sqrt{1-j\frac{\beta L}{D}}}$$

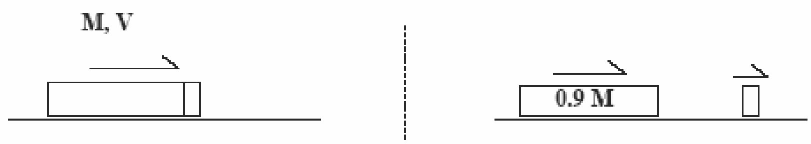
• Si $\beta = 1$ entonces $T = 0 + \frac{v_\circ}{\mu g} + 0$, vale decir, es el tiempo de un movimiento uniformemente acelerado hasta detenerse.

MOMNETUM I

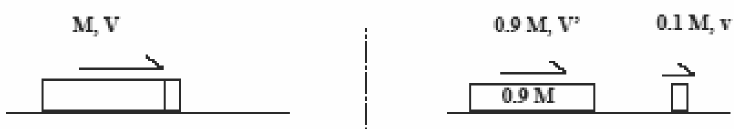
Sobre una superficie pulida se desplaza hacia la derecha un carro de masa y velocidad inicial $M_\circ$ y $V_\circ$ respectivamente. El carro ha de utilizar su propia masa para detenerse y luego retroceder. Para ello eyectará sucesivamente (en sentido contrario a su movimiento) la décima parte de la masa que tiene al momento de la eyección. La velocidad relativa entre el carro y la fracción eyectada de masa es $u_\circ$.

A) Determine la velocidad del carro luego de la primera eyección de freno.

B) Determine el numero de eyecciones necesarias para que el carro comience a moverse hacia atrás.



Solución



PARTE A:

- Conservación de momentum antes y despues de la eyección:

$$MV = 0.9MV' + 0.1Mv$$

- La velocidad v es el de la fracción eyectada relativa al piso:

$$v \equiv v_{frac/piso} = V_{frac/carro} + V_{carro/piso} = u_\circ + V'$$

- Sustituyendo en ecuacion de conservación:

$$MV = 0.9MV' + 0.1M(u_\circ + V')$$

- Despejando:

$$V' = V - 0.1u_\circ$$

PUNTUACION: 1Pto cons mtum + 1 Pto mov relativo + 1 Pto despeje.

PARTE B: De la relación anterior se observa que <u>cada vez</u> que se eyecta el 10% de la masa hacia adelante el carro disminuye su velocidad en $0.1u_\circ$. Para frenar totalmente al cabo de N eyecciones se impone

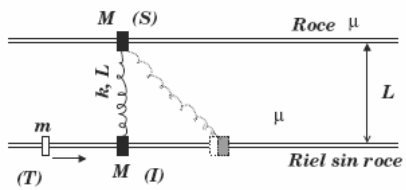
$$N0.1u_\circ = V_\circ \quad \Rightarrow \quad N = 10\frac{V_\circ}{u_\circ}$$

MOMNETUM Y ENERGIA I

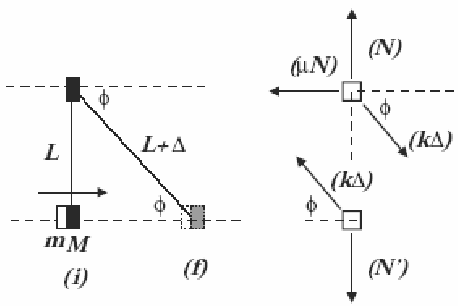
PROBLEMA 3: En ausencia de gravedad se disponen dos rieles paralelos separados una distancia $\underline{L}$. Cada riel tiene pasada argollas de masa $\underline{M}$ unidas por un resorte de longitud natural L, constante elástica $\underline{k}$ y sin masa. El riel inferior de la figura no tiene roce, en tanto que el superior es rugoso. El coeficiente de roce estático entre el riel superior y la argolla S es $\underline{\mu}$. Una tercera argolla T de masa $\underline{m}$ se acerca y adhiere a la argolla inferior I.

A) [6Pt] Determine la rapidez máxima de la argolla T que garantice que la argolla S nunca resbale.

B) [1Pt] En base a su resultado, examine y discuta el caso M=0.



Solución



- Conservación de momentum en la colisión (conjunto sale con rapidez v):

$$mu = (m+M)v \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{m}{m+M}u} \,.$$

- Conservación de energía (i) $\to$ (f), denotando por Δ la elongación del resorte y sustituyendo valor de v en términos de u:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}k\Delta^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta^2 = \frac{m^2u^2}{k(m+M)}}$$

- Una vez elongado el resorte se analiza el tirón sobre el anillo superior. La situación es estática. Las fuerzas sobre el anillo superior son: contacto (roce $\vec{f}$ y normal $\vec{N}$) y fuerza elástica del resorte $\vec{f_e}$. Entonces: $\vec{f} + \vec{N} + \vec{f_e} = 0$. Proyecciones según ejes y-x (con ϕ indicado en la figura) e imponiendo condición a punto de resbalar ($f = \mu N$):

$$\left.\begin{array}{ll} y) & 0 + N - k\Delta\sin\phi = 0 \\ x) & -\mu N + 0 + k\Delta\cos\phi = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \boxed{\mu = \cot\phi} \tag{3}$$

- Hay que relacionar ϕ con Δ (geometría):

$$\sin\phi = \frac{L}{L+\Delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin\phi} = 1 + \frac{\Delta}{L}$$

- Usando la identidad $1 + \cot^2\phi = 1/\sin^2\phi$, sustituyendo y despejando u:

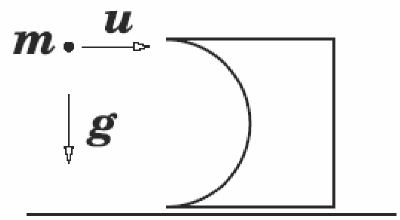
$$1 + \mu^2 = \left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)^2 \quad \Rightarrow \Delta^2 = L^2(\sqrt{1+\mu^2} - 1)^2 \quad \Rightarrow \frac{m^2u^2}{k(m+M)} = L^2(\sqrt{1+\mu^2} - 1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u = \frac{L}{m}\left(\sqrt{1+\mu^2} - 1\right)\sqrt{k(m+M)}}$$

- Cuando $M = 0$ se tiene que $u = L\sqrt{k/m}\left(\sqrt{1+\mu^2} - 1\right)$: a pesar de que la masa de los anillos en los rieles son nulas el roce de los rieles sigue actuando. La condición $\mu = cot\phi$ no depende de las masas involucradas.

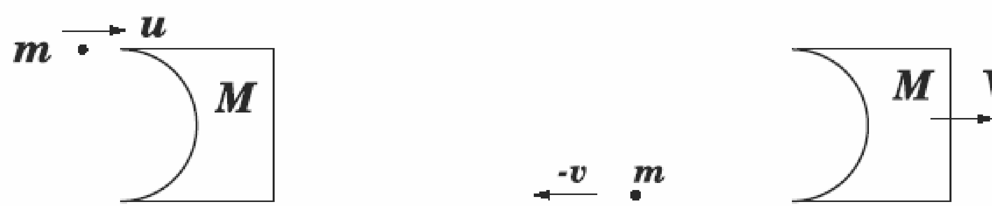
MOMNETUM Y ENERGIA II

$\boxed{2}$ **Considere un sólido de masa desconocida en reposo sobre una superficie horizontal muy resbalosa. El cuerpo tiene una cara cóncava semiesférica de radio $\underline{R}$ cuyo borde inferior queda a ras de piso. Una bolita de masa $\underline{m}$ es disparada horizontalmente con rapidez $\underline{u}$ sobre el punto más alto de la cara cóncava y muy cerca de ésta. Luego del contacto sin roce entre los dos cuerpos el bloque adquiere movimiento mientras que la bolita emerge en sentido opuesto, con rapidez $\underline{v}$, a ras de piso.**



• Determine la masa del bloque si todo lo descrito ocurre en presencia de la gravedad $\underline{g}$.

Solución



• La colisión conserva energía mecánica (no hay fricción), y además la componente horizontal del momentum del par bloque⊕bolita se conserva pues no hay fuerza externa actuando según la horizontal. Sea V la rapidez del bloque después del contacto con la bolita. Conservación de energía mecánica:

$$\frac{1}{2}mu^2 + mg(2R) = \left\{\frac{1}{2}mv^2 + 0\right\} + \frac{1}{2}MV^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{m(u^2 - v^2) + 4mgR = MV^2} \quad (1)$$

• Conservación de momentum según la horizontal:

$$mu + 0 = -mv + MV \quad \rightarrow \quad \boxed{V = m(u+v)/M} \quad (2)$$

• Sustituyendo V de Ec. 2 en Ec. 1 tenemos:

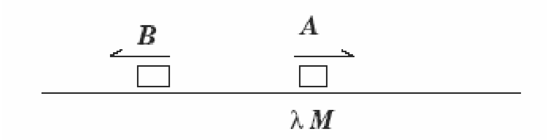
$$m(u^2 - v^2) + 4mgR = M\frac{m^2(u+v)^2}{M^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{M = \frac{m(u+v)^2}{u^2 - v^2 + 4gR}}$$

MOMNETUM Y ENERGIA III

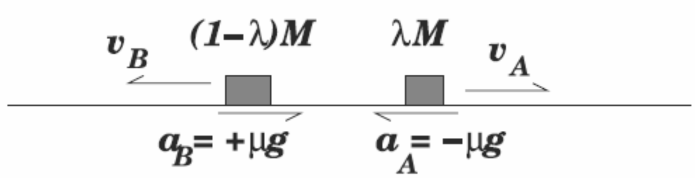
PROBLEMA 3: En presencia de la gravedad $\underline{g}$ un cuerpo de masa $\underline{M}$ posa sobre un plano horizontal rugoso con el cual tiene un coeficiente de roce cinético $\underline{\mu}$. Mediante una explosión el cuerpo se divide violentamente en dos fragmentos, A y B, de masas $\underline{\lambda M}$ y $(1-\lambda)M$ respectivamente. Los dos fragmentos resbalan en sentidos opuestos alejándose del punto de la explosión. La energía cinética adquirida por ambos cuerpos debido a la explosión es $\underline{E}$.

A) [4Pt] Calcule y grafique el momentum del sistema P como función del tiempo. En su gráfico debe rotular, en términos de los datos del problema, valor inicial, máximo y final, y los instantes correspondientes.

B) [2Pt] Determine la razón entre las distancias recorridas por cada fragmento.



Solución



- SINOPSIS: luego de la explosión los bloques parten con rapideces distintas debido a que los fragmentos son (en general) de distinto tamaño. Ambos experimentan aceleraciones de frenado de magnitud μg. Puesto que sus rapideces iniciales distintas, se detendrán en instantes diferentes. Conviene entonces identificar los instantes de detención de cada fragmento: t_A y t_B.

- Estudiamos el movimiento en forma unidimensional tomando como dirección positiva la de partida del fragmento A. Conservación de momentum para determinar velocidades inmediatamente después de la explosión ($p_A + p_B = 0$):

$$\lambda M v_A + (1-\lambda) M v_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda v_A + (1-\lambda) v_B = 0 \tag{6}$$

La energía cinética inmediatamente después de la exlosión es E:

$$\frac{1}{2}\lambda M v_A^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda) M v_B^2 = E \qquad \Rightarrow \qquad \lambda v_A^2 + (1-\lambda) v_B^2 = 2E/M \tag{7}$$

Para obtener v_A despejamos v_B de 6 y reemplazamos en 7. Encontramos para v_A

$$v_A = \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}}$$

Utilizamos 6 para obtener v_B:

$$v_B = -\sqrt{\frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M}}$$

- Podemos determinar el momentum inicial de A:

$$p_A = \lambda M \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p_A = \sqrt{2ME\lambda(1-\lambda)}}$$

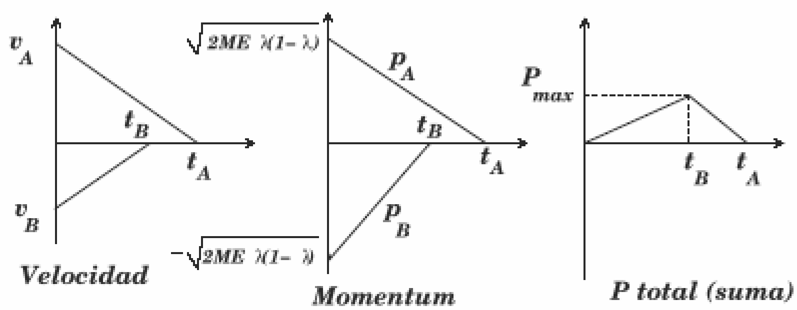
• Supongamos que el fragmento $\boldsymbol{A}$ sale más rápido que $\boldsymbol{B}$ (lo cual se logra con $\boldsymbol{\lambda \leq 1/2}$). Identificamos los instantes en que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se detienen. Para el movimiento de $\boldsymbol{A}$:

$$v_A(t) = \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} - \mu g t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_A = \frac{1}{\mu g}\sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}}}$$

• Análogamente para el fragmento $\boldsymbol{B}$:

$$v_B(t) = -\sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} + \mu g t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_B = \frac{1}{\mu g}\sqrt{\frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M}}}$$

• Puesto que estamos considerando $\boldsymbol{\lambda \leq 1/2}$, entonces $\boldsymbol{t_A}$ es posterior a $\boldsymbol{t_B}$. Las curvas de velocidades en función del tiempo son las rectas ilustradas en la figura siguiente. Los momenta resultan de multiplicar las velocidades $\boldsymbol{v_A(t)}$ y $\boldsymbol{v_B(t)}$ por sus respectivas masas. En t=0 $\boldsymbol{p_B = -p_A}$. Al sumar ambas rectas ($\boldsymbol{P(t) = p_A(t) + p_B(t)}$) se obtiene el gráfico de más a la derecha (momentum total P).



• El momentum máximo del sistema $\boldsymbol{P(t) = p_A(t) + p_B(t)}$ se logra en $\boldsymbol{t_B}$. En ese instante sólo se mueve $\boldsymbol{A}$ y el momentum resulta:

$$P(t_B) = P_{\max} = p_A(t_B) = \lambda M \left\{ \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} - \mu g t_B \right\} = \lambda M \left\{ \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} - \sqrt{\frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M}} \right\}$$

Factorizando y simplificando:

$$\boxed{P_{\max} = \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}}\left(1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = (1-2\lambda)\sqrt{\frac{2E}{\lambda(1-\lambda)M}}}$$

• Para determinar los caminos recorridos por ambos recordamos la relación '$\boldsymbol{v^2 = 2a\Delta x}$', con la cual (cuidando los signos y considerando aceleraciones de igual magnitud $\boldsymbol{\mu g}$):

$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M} \div \frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M} = \frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M} \times \frac{(1-\lambda)M}{2E\lambda} \qquad \Rightarrow$$

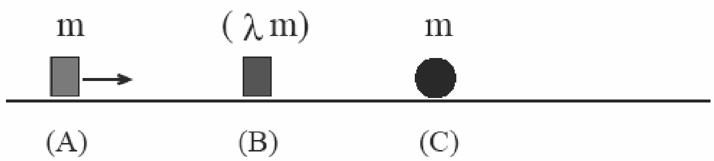
$$\boxed{\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2}}$$

MOMNETUM Y ENERGIA IV

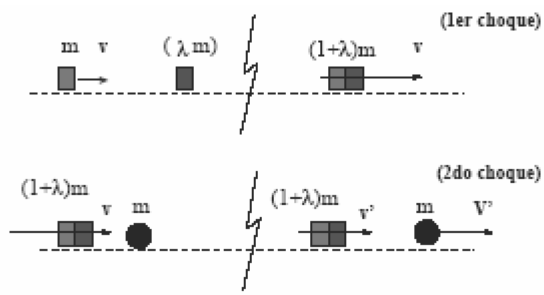
PROBLEMA 3 Los cuerpos que se muestran en la figura posan en línea sobre una superficie horizontal pulida. El bloque A de masa $\underline{m}$ incide con velocidad $\underline{v_\circ}$ chocando al bloque B de masa $\underline{\lambda m}$ inicialmente en reposo. Después de la colisión ambos bloques quedan adheridos y posteriormente chocan elásticamente la bola C, de masa $\underline{m}$, inicialmente detenida.

a)[5P] Determine las velocidades adquiridas por los bloques y la bola.

b)[1P] Verifique su resultado para el caso $\lambda \to 0$ e interprete concisamente.



Solución



• El movimiento es 1D. Para el 1er choque (entre los bloques) sólo conservamos momentum. Para simplificar álgebra llamemos $(1+\lambda)m = \beta m$:

$$mv_\circ + 0 = (1+\lambda)mv = \beta mv \quad \rightarrow \quad \boxed{v_\circ = \beta v} \quad (1)$$

• Para el 2do choque conservamos momentum y energía. Para el mtum:

$$\beta mv = \beta mv' + mV' \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta(v - v') = V'} \quad (2)$$

y la energía:

$$\frac{1}{2}\beta mv^2 + 0 = \frac{1}{2}\beta mv'^2 + \frac{1}{2}mV'^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta(v^2 - v'^2) = V'^2} \quad (3)$$

• De esta última se tiene $\beta(v - v')(v + v') = V'^2$; usando (2) para V' y simplificando:

$$\boxed{v + v' = V'} \quad (4)$$

• Las ecuaciones (2) y (4) constituyen un sistema de 2x2 donde $\boldsymbol{v'}$ y $\boldsymbol{V'}$ son las incógnitas, y $\boldsymbol{v}$ es dato (Ec 1). Igualando (2)=(4)...

$$\beta(v - v') = (v + v') \quad \rightarrow \quad \boxed{v' = v\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)}$$

• Sustituir este valor de $\boldsymbol{v'}$ en (4) para obtener $\boldsymbol{V'}$; se obtiene:

$$\boxed{V' = v\left(\frac{2\beta}{\beta + 1}\right)}$$

• Reemplazamos $\boldsymbol{\beta = (1 + \lambda)}$ y $\boldsymbol{v = v_\circ/\beta}$ para obtener:

$$\boxed{v' = \frac{\lambda v_\circ}{(1 + \lambda)(2 + \lambda)} \qquad V' = \frac{2v_\circ}{2 + \lambda}}$$

• En el caso $\boldsymbol{\lambda = 0}$ obtenemos: $\boldsymbol{v' = 0}$ y $\boldsymbol{V' = v_\circ}$, lo cual efectivamente corresponde al caso de dos masa idénticas en choque elástico, con una de ellas inicialmente detenida (el bloque del medio no existe!).