MA1001-5: Introducción al Cálculo.
Profesor: Emilio Vilches G.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
Otoño 2013

Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo y Orden en $\mathbb{R}$.

P1. Usando sólo los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades, fundamentando cada paso (si necesita alguna propiedad extra, debe demostrarla):

(i) Demuestre que $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, con $b,d \neq 0$, se cumple:

$$ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}.$$

(ii) Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$[(a+b=0) \wedge (a+c=0)] \Rightarrow b = c.$$

(iii) Pruebe que $\forall a \in \mathbb{R}:\ a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$.

(iv) Demuestre que para cualquier real $a \neq 0$, se cumple:

$$(a^2 - a^{-1})(a + a^{-1} + 1)^{-1} = a - 1.$$

(v) **Propuesto** : Demuestre que para cualquier real $a \neq 0$, se cumple: $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

P2. Usando los axiomas de orden, pruebe justificando en cada caso que:

(a) $\forall a,b \in \mathbb{R}:\ a^2 + b^2 \geq 2ab$. [Desigualdad Fundamental]

(b) $\forall a,b > 0:\ a^{-1} + b^{-1} \geq 4 \cdot (a+b)^{-1}$.

(c) Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

$$[(a^2 + b^2 = 1) \wedge (c^2 + d^2 = 1)] \Rightarrow ac + bd \leq 1.$$