MA1101-1 - Introducción al Álgebra

02.05.2013

Auxiliar 7

Profesor: *Pablo Dartnell*Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. (a) Pruebe, sin usar inducción, que:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$$

(b) Muestre, sin usar inducción, que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

P2. Sean p, q reales no negativos tales que $p + q = 1$. Calcule:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$

Indicación: Note que: $k^2 = k(k-1) + k$

P3. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 1$. Muestre que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a^{i+j} = \frac{a(a^{2n+2} - a^{n+2} - a^{n+1} + a)}{(a-1)^2(a+1)}$$

P4. *Control 4, 2008*

(a) Utilice el teorema del binomio en la expresión:

$$(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$$

para probar, sin inducción, que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

(b) Calcule en función de n el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)}$$

P5. Propuesto:

(a) Pruebe, sin usar inducción que, para $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$ se tiene:

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

Y deduzca que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

(b) Sean $p, k \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq p$ y p un número primo. Pruebe que:

$$\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \in \mathbb{N}$$

Concluya que, si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$$