P1 (a) $*$ conmutará si se cumple que:

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)*(c,d) = (c,d)*(a,b)$$

$$\iff (ac, bc+d) = (ca, da+b)$$

$$\iff ac = ca \wedge bc+d = da+b$$

$$\iff bc+d = da+b.$$

Y esto no tiene porque cumplirse, i.e. no es válido $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$, luego $*$ NO conmuta.

(b) $*$ Asocia ssi $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$:

$$((a,b)*(c,d))*(e,f) = (a,b)*((c,d)*(e,f))$$

$$\iff (ac, bc+d)*(e,f) = (a,b)*(ce, de+f)$$

$$\iff (ace, (bc+d)e+f) = (ace, bce+de+f)$$

$$\iff ace = ace \wedge (bc+d)e+f = bce+de+f$$

$$\iff V$$

$\therefore$ $*$ SÍ es asociativa.

(c) Supongamos que existe el neutro en $\mathbb{R}^2$ para $*$. Llamémoslo (e_1, e_2). Luego, debe tenerse que:

$$(a,b)*(e_1,e_2) = (a,b) \wedge (e_1,e_2)*(a,b) = (a,b)$$

$$\Rightarrow (a \cdot e_1, b \cdot e_1 + e_2) = (a,b) \Rightarrow \boxed{e_1 = 1} \Rightarrow \boxed{e_2 = 0}$$

$\therefore (e_1, e_2) = (1,0)$ es el neutro para $*$ en $\mathbb{R}^2$, pues verifica que: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a,b) * (1,0) = (a,b) \quad \wedge \quad (1,0) * (a,b) = (a,b)$$

(d) Supongamos que (a,b) es invertible.

Como $*$ asocia y tiene neutro, el inverso de (a,b) es único, llamémoslo (x,y). Luego, debe tenerse que:

$$(a,b) * (x,y) = (x,y) * (a,b) = (1,0) \qquad (\mathrm{I})$$

$$\Rightarrow (a,b) * (x,y) = (1,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad ax = 1 \quad \wedge \quad bx + y = 0$$

$$\overset{a \neq 0}{\Longrightarrow} \quad x = \frac{1}{a} \quad \wedge \quad y = -bx = -\frac{b}{a}$$

a debe ser distinto de 0!

$\therefore$ Para que (a,b) sea invertible basta que a sea distinto de 0 y b sea cualquiera.

De esta manera (a,b) tiene inverso $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$

(Es fácil ver que $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ verifica (I))

(e) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ es idempotente ssi:

$$(a,b) * (a,b) = (a,b)$$

$$\iff (a^2, ab+b) = (a,b)$$

$$\iff a^2 = a \wedge ab + b = b$$

$$\iff (a=1 \wedge b=0) \vee (a=0 \wedge b \in \mathbb{R}, \text{cualquiera})$$

$\therefore$ Son idempotentes: $(1,0), (0,b)$; con $b \in \mathbb{R}$ cualquiera.

P2 (a) Sean $f, g \in \mathcal{F}$.

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot g(n-k) \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$= f(0) \cdot g(n) + f(1) \cdot g(n-1) + \ldots + f(n-1) \cdot g(1) + f(n) \cdot g(0$$

sumando "de atrás para adelante"

$$= g(0) \cdot f(n) + g(1) \cdot f(n-1) + \ldots + g(n-1) \cdot f(1) + g(n) \cdot f($$

$$= \sum_{k=0}^{n} g(k) \cdot f(n-k)$$

$$= (g * f)(n)$$

$\therefore$ $*$ es conmutativa. ∎

(b) Llamemos f_e al candidato a neutro:

Debe tenerse que:

$$(f * f_e)(n) = f(n) \quad \wedge \quad (f_e * f)(n) = f(n)$$

Pero como $*$ conmuta, basta verificar:

$$(f * f_e)(n) = f(n)$$

$$(f * f_e)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) f_e(n-k)$$

$$= f(0) \cdot f_e(n) + f(1) \cdot f_e(n-1) + \ldots + f(n) \cdot f_e(0)$$

$$\therefore f_e(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n = 0 \\ 0 & , \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

es el neutro en $\tilde{F}$ para $*$.

(c) Nos gustaría que: $\forall f, g, h \in \tilde{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(f * (g+h))(n) = (f * g)(n) + (f * h)(n)$$

En efecto:

$$(f * (g+h))(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)(g+h)(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot g(n-k) + \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot h(n-k)$$

$= (f*g)(n) + (f*h)(n)$

Luego, como $*$ es conmutativa, se tiene que:

$((g+h)*f)(n) = (g*f)(n) + (h*f)(n)$

De donde se concluye que $*$ distribuye con respecto a la suma de funciones.

■

P3 (i) Veamos que Δ asocia.

Sean $x, y, z \in S$.

$$x \Delta (y \Delta z) = x \Delta (y * a * z)$$
$$= x * a * (y * a * z)$$
$$\overset{* \text{ asocia}}{=} (x * a * y) * a * z$$
$$= (x \Delta y) * a * z$$
$$= (x \Delta y) \Delta z$$

$\therefore \Delta$ es asociativa.

Veamos que Δ tiene neutro.

Si lo tuviera, llamémoslo i, luego, debe verificarse que: $(\forall x \in S)$

$x \Delta i = x$

$\Longleftrightarrow x * a * i = x$

$\Longrightarrow a * i = e \Longrightarrow i = a^{-1}$

Por otra parte:

$$a^{-1} \Delta x = a^{-1} * a * x$$
$$= e * x$$
$$= x$$

$\therefore$ El neutro en S para Δ es: $i = a^{-1}$.

(ii) Como Δ asocia y tiene neutro, los inversos son únicos.

Sea $x \in S$, supongamos, invertible. Llamemos y al inverso de x para Δ. Luego, debe tenerse:

$$x \Delta y = a^{-1} \Longleftrightarrow x * a * y = a^{-1} \quad / * a \left(\begin{array}{c}\text{Por la}\\ \text{derecha}\end{array}\right)$$
$$\Longrightarrow x * a * y * a = e$$
$$\Longrightarrow a * y * a = x^{-1}$$

inverso según $*$

Esta última implicancia pues, de manera análoga, se obtiene que:

$$a * y * a * x = e$$

Por lo tanto, para que x sea invertible según Δ, debe serlo según $*$. El inverso de x según Δ será (no es difícil calcularlo):

$$y = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}, \quad \text{donde } x^{-1} \text{ es el inv. de } x \text{ según } *$$

Usando esta fórmula, el inverso para a según Δ es:

$$a_{\Delta}^{-1} = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}.$$

iii) Si $(S,*)$ es grupo

$\Rightarrow$ todos los elementos de $(S,*)$ son invertibles.

$\Rightarrow$ todos los elementos de (S,Δ) son invertibles.

Además, habíamos visto que:

Δ es asociativa y (S,Δ) posee neutro.

Por lo tanto, (S,Δ) es grupo!