MA1101-1 - Introducción al Álgebra **06.06.2013**

Auxiliar 11

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ como:

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

(a) Pruebe que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es un cuerpo.

(b) Muestre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

P2. Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

(a) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

(b) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ posee divisores del cero.

(c) Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

P3. *Control 5, 2011*

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor de cero y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es un divisor de cero.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos de A es un divisor de cero, entonces al menos uno de ellos es un divisor de cero.

P4. **Propuesto**

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo (no necesariamente con unidad). Para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ se define:

$$na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0 \text{ ; } 0a = 0_A \text{ si } n = 0$$

y

$$na = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-n \text{ veces}} \text{ si } n < 0$$

Además, puede usar, sin demostrar que:

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z})(\forall a, b \in A) \quad (n + m)a = na + ma \text{ ; } n(ma) = nma \text{ ; } a(nb) = nab.$$

Considere en $\mathbb{Z} \times A$ las leyes *Suma* y *Producto* definidas por:

Suma : $(n, a) \oplus (m, b) = (n + m, a + b)$

Producto : $(n, a) \odot (m, b) = (nm, nb + ma + ab)$

(a) Demuestre que: $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ es un anillo con unidad.

(b) Demuestre que las funciones:

$$f : A \to \mathbb{Z} \times A, \text{ definida por } : f(a) = (0, a) \ , \forall a \in A)$$
$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times A, \text{ definida por } : g(n) = (n, 0_A) \ , \forall n \in N)$$

son homomorfismos inyectivos de los anillos $(A, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ en el anillo $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$, respectivamente.

(c) Considere en lugar de $(A, +, \cdot)$ el cuerpo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Muestre que el anillo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ tiene divisores del cero. ¿Es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ un cuerpo?