Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre Otoño 2013

Guía Preparación Control 6 MA1101-8

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Joaquín Fariña V.

El objetivo de esta guía es apoyarlos en el estudio para este último Control. La idea es comenzar esta guía luego de terminar la comprensión de la materia y tengan claras ciertas técnicas de demostración. Para esto último creo que lo mejor es revisar los ejercicios hechos en Cátedras y Auxiliares, además de realizar algunos controles anteriores.

Una vez comprendida la materia, en el sentido de poder discernir para que pueden o no ser útiles ciertas hipótesis y de que manera es apropiado usarlas, de esta manera, la ejercitación debería resultar un proceso mucho más natural y nos asegura lograr el aprendizaje deseado.

Esto les resultará muchos más útil que comenzar realizando ejercicios y memorizando pautas, ya que a la larga los dejará con un vacío que mas adelante podría traerles problemas.

La idea de esta guía es orientarlos, no es necesario que realicen todos los problemas. los ejercicios marcados con ♠ representan los que a mi juicio utilizan técnicas que es conveniente que manejen. Los ejercicios marcados con ♣ son según yo de dificultad más elevada, no se frustren si no les salen y dejenlos para el final.

Morfismos

P1. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e.

i. Para $a \in G$ se define la función $h_a : G \longrightarrow G$ tal que $h_a(x) = a * x * a^{-1}$. Pruebe que $\forall a \in G$, h_a es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

ii. Se define el conjunto $A = \{f : G \longrightarrow G\ ,\ f\ isomorfismo\ de\ (G, *)\ en\ (G, *)\}$. Pruebe que la función $\phi : (G, *) \longrightarrow (A, \circ)$ que a todo $a \in G$ le asocia $\phi(a) = h_a$, es un homomorfismo. Considere a $\circ$ la composición de funciones usual y a h_a como el isomorfismo de i.

P2. ♠

i. Considere en $\mathbb{R}^2$ las operaciones $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

ii. Encuentre todos los morfismos de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

P3. ♠ Se define el conjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = 1\}$. Considere a $(S_1, \cdot)$ subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ (no lo pruebe).

i. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cúbica de la unidad. Probar que la función $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow S_1$ definida como $f(a) = w^a$, para cada $a \in \mathbb{Z}_3$, es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(S_1, \cdot)$.

ii. Pruebe que si $g : (\mathbb{Z}_3, +_3) \longrightarrow (S_1, \cdot)$ es un homomorfismo, entonces existe una raiz cúbica de la unidad $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(a) = w^a$, en todo $a \in \mathbb{Z}_3$.

Números Complejos

P1. ♠ Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea θ, con $0 \leq \theta \leq \pi$ en ángulo entre ellos. Demuestre que:

i. $\mathbb{R}e(z_1 z_2) = |z_1||z_2| \cos\theta$.

ii. $\mathbb{I}m(z_1 z_2) = \pm|z_1||z_2| \sin\theta$.

iii. El área del triángulo formado por z_1, z_2 y $(z_2 - z_1)$ es $\dfrac{|\mathbb{I}m(z_1\overline{z_2})|}{2}$.

iv. Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ¿Cuánto vale $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|$?

iv. Encuentre la parte real e imaginaria de $i^{\frac{1}{4}}$.

P3. Probar que $\forall w, z \in \mathbb{C}$ se tiene que:

i. $|z| \leq |z-w| + |w|$

ii. $|z| - |w| \leq |z-w|$

iii. $|z| - |w| \leq |z+w|$

P4. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\bar{z}w \neq 1$. Pruebe que:

i. $|z| < 1 \wedge |w| < 1 \Longrightarrow \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| < 1$

ii. $|z| = 1 \wedge |w| = 1 \Longrightarrow \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1$

P5. ♣

i. Demuestre que:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\frac{(n+1)}{2}\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Indicación: Le podría ser útil recordar la suma geométrica.

ii. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\left(1 + i\tan\frac{\pi}{12}\right)^n + \left(1 - i\tan\frac{\pi}{12}\right)^n = 2\left(\sec\frac{\pi}{12}\right)^n \cos\frac{n\pi}{12}$$

P6. i. Determine explícitamente el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1\}$.

ii. Sean $\alpha, w \in \mathbb{C}$ tales que $e^\alpha = w$. Determine explícitaamente el conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = w\}$.

iii. Demuestre que si z es raiz n-ésima de la unidad ($n \geq 2$) y n es divisor de m, entonces z es raiz m-ésima de la unidad.

P7. Calcular:

i. $S = \sum_{k=6}^{2013} i^k$

ii. $P = \prod_{k=6}^{2013} i^k$

P8. ♣

i. Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \cot\frac{\pi}{2n}$$

ii. Sean $w_k \in \mathbb{C}$ con $k = 0, 1, ..., n-1$ raíces n-ésimas de la unidad. Demuestre que:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(w_k^2 - 2w_k\cos\theta + 1) = 2(1 - \cos(n\theta))$$

Indicación: Considere sabido que $x^n - 1 = (x-w_0)(x-w_1)...(x-w_{n-1})$

P9. i. Demuestre que para $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$e^{i\bar{z}} = e^{\bar{iz}} \iff z = k\pi$$

ii. Exprese en forma $a + bi$ las raíces cuartas de $z_0 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

iii. Sean z_1 y z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Demuestre que:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1 = z_2$$

Indicación: Pruebe primero que: $|z| = 1 \wedge \mathbb{R}e(z) = 1 \iff z = 1$.

P10. ♣ Considere, para $\alpha \in \mathbb{R}$ los números reales $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ y $S' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$.

i. Pruebe la siguiente igualdad:

$$S + iS' = (1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n$$

ii. Escriba el complejo $1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ en notación polar y deduzca que:

$$S = 2^n (\cos \frac{\alpha}{2})^n \cdot \cos n\frac{\alpha}{2}$$

$$S' = 2^n (\cos \frac{\alpha}{2})^n \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

P11. ♠

i. Los complejos $z_1, z_2, ..., z_p$ son tales que $|z_k| = 1$, $\forall k \in \{1, 2, ..., p\}$. Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{p} z_i = a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{z_i} = a$$

ii. Sean $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $w = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Encuentre el menor entero $n > 0$ tal que $z^n = w^n = 1$.