

 (a)

$$* (1-i)^4 (1+i)^4 = \left[(1-i)(1+i) \right]^4 = (1^2 - i^2)^4 = 2^4 = 16 + 0i$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ a & + b i \end{matrix}$

$$* 1+i + \frac{i-1}{|1-i|^2 + i} = 1+i + \frac{i-1}{\sqrt{2}^2 + i} = 1+i + \frac{i-1}{2+i}$$

$$= 1+i + \frac{(i-1)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 1+i + \frac{(-2+3i+1)}{(2^2 - i^2)}$$

$$= 1+i + \frac{3i-1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$$

(b) Veamos que: $|s|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos(\phi)$

Suponemos que: $s = u - v$

$$\Rightarrow |s|^2 = |u - v|^2$$

$$= (u-v)(\overline{u-v})$$

$$= (u-v)(\bar{u} - \bar{v})$$

$$= u\bar{u} + v\bar{v} - u\bar{v} - v\bar{u}$$

$$= u\bar{u} + v\bar{v} - (u\bar{v} + v\bar{u})$$

$$= |u|^2 + |v|^2 - (u\bar{v} + v\bar{u})$$

Luego, nos basta probar que:

$$u \cdot \bar{v} + v \cdot \bar{u} = 2 |u| |v| \cos(\phi) \quad (1)$$

En efecto, de manera general, supongamos que:

$$u = |u| \cdot e^{i \cdot \theta_u}$$

$$v = |v| \cdot e^{i \cdot \theta_v}$$

Y así:

$$\bar{u} = |u| \cdot e^{-i \cdot \theta_u}$$

$$\bar{v} = |v| \cdot e^{-i \cdot \theta_v}$$

Luego:

$$u \cdot \bar{v} + v \cdot \bar{u} = |u| \cdot e^{i \theta_u} \cdot |v| \cdot e^{-i \theta_v} + |v| \cdot e^{i \theta_v} \cdot |u| \cdot e^{-i \theta_u}$$

$$= |u| \cdot |v| \cdot (e^{i \theta_u} \cdot e^{-i \theta_v} + e^{i \theta_v} \cdot e^{-i \theta_u})$$

$$= |u| \cdot |v| \cdot (e^{i(\theta_u - \theta_v)} + e^{i(\theta_v - \theta_u)})$$

* suma de complejos conjugados

$$= |u| \cdot |v| \cdot (e^{i(\theta_u - \theta_v)} + e^{-i(\theta_u - \theta_v)})$$

$$= |u| \cdot |v| \cdot 2 \cdot \cos(\theta_u - \theta_v)$$

Con lo que se prueba (1) y así, lo que se quería demostrar. □

(Esta última página del desarrollo se podría haber ahorrado notando que: $u \cdot \bar{v}, v \cdot \bar{u}$; son conjugados...

P2 (a)

\Rightarrow Supongamos $z \in \mathbb{C}$, de la forma

$$z = a + bi, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Queremos ver que $z \in \mathbb{R}$, es decir, que $b = 0$.

Así:

$$|z+i| = |z-i| \Rightarrow |a+bi+i| = |a+bi-i|$$
$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$\Rightarrow 4b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$\therefore z \in \mathbb{R}$ (Pues su parte imaginaria es nula).

\Leftarrow Supongamos $z = a + bi$

$$\text{Como } z \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = a$$

Y así:

$$|z+i| = |a+i| = \sqrt{a^2+1} = |a-i| = |z-i|$$

$$\therefore |z+i| = |z-i|$$



(b) Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $\left| \frac{z-2}{z+1} \right| = 2$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z-2}{z+1} \right|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-2)(\overline{z-2})}{(z+1)(\overline{z+1})} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-2)(\bar{z}-2)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{z\bar{z} - 2(z+\bar{z}) + 4}{z\bar{z} + (z+\bar{z}) + 1} = 4 \quad (2)$$

Podemos suponer: $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Y recordando que: $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2a$$

Tenemos que: (2) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4a + 4 = 4(a^2 + b^2 + 2a + 1)$

$$\Leftrightarrow 0 = 3(a^2 + b^2) + 12a$$

$$\Leftrightarrow 0 = a^2 + b^2 + 4a$$

Luego, completamos cuadrados para "forzar" una ecuación de circunferencia:

$$\Rightarrow 0 = a^2 + b^2 + 4a \Leftrightarrow 0 = a^2 + b^2 + 4a + 4 - 4$$

$$\Leftrightarrow 4 = (a+2)^2 + b^2$$

Ec. de circunferencia $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

Y así, si z es tal que $\left| \frac{z-2}{z+1} \right| = 2$, entonces z está en la circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 2 en el plano complejo. //

P3b (a) Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Sean } z_1 = (-1 + i\sqrt{3}) \quad \text{y} \quad z_2 = (-1 - i\sqrt{3})$$

Escribiendo z_1 en su forma polar, se obtiene que:

$$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Notando que z_1 y z_2 son complejos conjugados:

$$z_2 = 2 \cdot e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$

Luego, usando la fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned} z_1^{3n} + z_2^{3n} &= \left(2 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} \right)^{3n} + \left(2 \cdot e^{-i\frac{2}{3}\pi} \right)^{3n} \\ &= 2^{3n} \cdot e^{i2\pi n} + 2^{3n} \cdot e^{-i2\pi n} \end{aligned}$$

$$Y \text{ como } e^{iz\pi n} = e^{-iz\pi n} = 1$$

$$z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2^{3n} + 2^{3n} = 2^{3n+1}$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z_1^{3n} + z_2^{3n}) = 2^{3n+1}$$

$$\operatorname{Im}(z_1^{3n} + z_2^{3n}) = 0. //$$

(b) Sea $z \in \mathbb{C}$, otra raíz cúbica de la unidad, con $z \neq 1$.

Como w es raíz cúbica de la unidad:

$$w^3 = 1 \Rightarrow (1+w^3)^6 = 2^6 = 64$$

Así, nos basta probar que:

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^3 = -2$$

Propiedad importante!

Sabemos que la suma de las raíces de la unidad es cero,

luego:

$$1 + w + z = 0 \Rightarrow 1 + w = -z$$

$$\Rightarrow (1+w)^3 = (-z)^3 = -1$$

Y así, basta probar que:

$$(1+w^2)^3 = -1$$

En efecto, como las raíces cúbicas de la unidad son de

la forma:

$$e^{\frac{izk\pi}{3}}$$

con $k \in \{0, 1, 2\}$

Se obtiene que:

$$\omega^2 = z \Rightarrow 1 + \omega^2 = 1 + z$$

$$\Rightarrow 1 + \omega^2 = -\omega$$

$$\Rightarrow (1 + \omega^2)^9 = (-\omega)^9 = -1$$

Que es lo que queríamos probar, para así concluir el resultado pedido.

