

# Pauta Examen Algebra

## Problema 1

a) Demuestre, usando inducción que  $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$

(0.5) { i) Para  $n=1$   $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k}} < 2 \Leftrightarrow 1 < 2 \Leftrightarrow V$

ii) Sea  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ , algun  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  (H.I)

iii) Por dem. y':  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}$ .

(0.5) { En efecto,  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(1.0) { Además,  $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + 1 < 2\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+1}$   
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n} + 1 < 2n+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n} < 2n+1 \quad (*)^2$   
 $\Leftrightarrow 4n^2+4n < 4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 0 < 1 \Leftrightarrow V$   
 Sigue que  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}$

b)  $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$

$\psi: F \times F \rightarrow F$  dado por  $\psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$

1) justifique que  $\psi(f, g) \in F$

En efecto,  $\psi(f, g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Basta indicar que al ser  $f$  y  $g$  biyectivos, sus inversas lo son y además la composición de biyecciones es biyección

Por lo tanto  $g^{-1} \circ f^{-1}$  es biyectiva, entonces  $\psi(f, g) \in F$

2) Pruebe que  $\psi$  es epyectivo pero no inyectivo.

Epiyectividad.

En efecto,  $\forall f \in F$ , siempre  $\exists (\text{id}_{\mathbb{R}}, f^{-1}) \in F \times F$  tal que.

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1.0} \quad \psi(\text{id}_{\mathbb{R}}, f^{-1}) = (\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1})^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f. \\ \text{Es decir, } (\forall f \in F) (\exists (g, h) \in F \times F); \psi(g, h) = f \\ \text{Así } \psi \text{ es epyectiva.} \end{array} \right\}$$

Inyectividad

Como contraejemplo para probar la NO INYECTIVIDAD, bastará tomar los pares de la forma  $(f, f^{-1}) \in F \times F$  en lo cual.

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1.0} \quad \psi(f, f^{-1}) = \psi(g, g^{-1}) = \text{id}_{\mathbb{R}}^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}} \quad (f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}) \\ \text{pero } (f, f^{-1}) \neq (g, g^{-1}) \end{array} \right\}$$

OBSERVACION:

Se aceptan ejemplos de casos particulares como las inyecciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma  
 $(x^3, \sqrt[3]{x}), (x^5, \sqrt[5]{x}) \dots$  etc.

3.) Demuestra que  $\psi(\psi(f, g), \psi(g^{-1}, f^{-1})) = \text{id}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \textcircled{0.5} \quad & \text{En efecto } \psi(\psi(f, g), \psi(g^{-1}, f^{-1})) = (\psi(f, g) \circ (\psi(g^{-1}, f^{-1}))^{-1})^{-1} \quad (\text{def}) \\ & \xrightarrow{\text{Propiedad}} = [\psi(g^{-1}, f^{-1})]^{-1} \circ [\psi(f, g)]^{-1} = [(g^{-1} \circ f^{-1})^{-1}]^{-1} \circ [(f \circ g)^{-1}]^{-1} \quad (\text{def}) \quad \text{y} \\ & \quad \quad \quad ((h^{-1})^{-1} = h) \\ & \quad \quad \quad = (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) \stackrel{\text{Asociat}}{=} g^{-1} \circ \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{\text{id}_{\mathbb{R}}} \circ g = \underbrace{g^{-1} \circ \text{id}_{\mathbb{R}}}_{g^{-1}} \circ g \\ & \quad \quad \quad = g^{-1} \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

# Pauta Examen Álgebra

## Problema 2

a) 1) Resuelva la ecuación  $x^2 - (2\cos\theta)x + 1 = 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$

Es inmediato, usando la fórmula.

$$(1.0) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \frac{\sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta \\ \text{Así, } x_1 &= \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \wedge x_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{aligned} \right.$$

2) Encuentre todas las raíces del polinomio

$$P(x) = x^{2m} - (2\cos\theta)x^m + 1 \quad \theta \in \mathbb{R}, m \geq 2$$

(0.5) Para resolver  $P(x) = 0$ , reemplazamos  $x^m = \alpha$ , con lo cual

$$x^{2m} - (2\cos\theta)x^m + 1 = \alpha^2 - (2\cos\theta)\alpha + 1 = 0 \quad \text{que es la ecuación en (1)}$$

(1.0) Sigue que (según (1))  $x_1^m = e^{i\theta} \wedge x_2^m = e^{-i\theta}$

Así, las raíces serán  $x_{1(k)} = e^{i\frac{2k\pi + \theta}{m}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$  (2m raíces)

y  $x_{2(k)} = e^{-i\frac{2k\pi + \theta}{m}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$

OBSERVACION También las raíces pueden describirse como

$$x_k = e^{i\frac{2k\pi + \theta}{m}}, k = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{y como el polinomio } \underbrace{P \in \mathbb{R}[x]}_{\text{Coef. Reales}}$$

también son raíces  $\overline{x_k} = e^{-i\frac{2k\pi + \theta}{m}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$

lo que completa los  $m$  pares de raíces en sus conjugadas (2m raíces)

3.) Factorice en  $\mathbb{R}[x]$  y en  $\mathbb{C}[x]$  el polinomio anterior para

$m=3$  y  $\theta = \pi/2$

con  $m=3$  y  $\theta = \pi/2$ ,  $2m=6$  y  $\cos \pi/2 = 0$  el polinomio queda

$$x^6 + 1 = 0$$

Directamente, usando (2), las raíces serán

$$x_k = e^{\frac{i(2k\pi + \pi/2)}{3}} \text{ con } k=0,1,2 \text{ y sus conjugados}$$

$$\text{Así } \left. \begin{aligned} x_0 &= e^{i\pi/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \wedge \overline{x_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ x_1 &= e^{i5\pi/6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \wedge \overline{x_1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ x_2 &= e^{i9\pi/6} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i \wedge \overline{x_2} = i \end{aligned} \right\} (0.5)$$

Entonces las factorizaciones quedarían

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= (x-i)(x+i)(x-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)(x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) \text{ en } \mathbb{C}[x] \\ \text{y } P(x) &= (x^2+1)\left[(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}\right]\left[(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}\right] \\ &= (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1) \text{ en } \mathbb{R}[x] \end{aligned} \right\} (0.5)$$

OBSERVACION: Si no se aprovecha (2), también se acepta la resolución de  $x^6+1=0$  como el cálculo de las raíces sextas de -1

b) Calcule la suma  $S = 1 + \frac{1}{1+i} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$   
y exprese su valor en la forma  $a+bi$

$$(1.0) \left\{ \begin{aligned} &S \text{ es una suma geométrica de razón } \frac{1}{1+i}, \text{ entonces} \\ S &= \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{1+i - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = -i + 1 + i \frac{1}{(1+i)^n} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Además } \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n} = \frac{1}{2^{n/2}} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) \text{ (Moivre)} \\ \text{Entonces } S &= -i + 1 + i \frac{1}{2^{n/2}} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right), \text{ es decir:} \\ S &= \underbrace{\left( \frac{1}{2^{n/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 1 \right)}_a + i \underbrace{\left( \frac{1}{2^{n/2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 1 \right)}_b \end{aligned} \right. (1.0)$$

# Prueba Examen Algebra

## Problema 3

a) Los puntos son  $A(-2,0)$ ,  $B(0,4)$ ,  $C(1,3)$  y  $D(2,16)$

(0.5) El punto  $A(-2,0)$  indica que  $-2$  es raíz de  $P(x)$ .  
 Así,  $P(x)$  puede escribirse como  $P(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$

Con  $B(0,4)$  se tiene  $P(0) = 4 \Rightarrow 2 \cdot c = 4 \Rightarrow c = 2$

Así  $P(x) = (x+2)(ax^2+bx+2)$

Con  $C(1,3)$ ,  $P(1) = 3 \Rightarrow 3(a+b+2) = 3 \Rightarrow a+b = -1$

y con  $D(2,16)$ ,  $P(2) = 16 \Rightarrow 4(4a+2b+2) = 16 \Rightarrow 2a+b = 1$

Segue que  $\left. \begin{array}{l} a+b = -1 \\ 2a+b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \end{array}$

Entonces  $P(x) = (x+2)(2x^2-3x+2) = 2x^3+x^2-4x+4$

Alternativa OBSERVACION: Si no se usa al inicio que  $-2$  es raíz,

también puede plantearse  $P(x)$  como  $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

y  $P(-2) = 0 \Rightarrow -8a+4b-2c+d = 0$

$P(0) = 4 \Rightarrow d = 4$

$P(1) = 3 \Rightarrow a+b+c+d = 3$

$P(2) = 16 \Rightarrow 8a+4b+2c+d = 16$

De donde finalmente  $d=4$ ,  $b=1$ ,  $a=2$  y  $c=-4$

y  $P(x) = 2x^3+x^2-4x+4$

b) 1) De ambas sumas, el término  $\sum_{k=1}^n (a-b)^2 x_k^2 \geq 0$  (Suma de cuadrados)

El término  $2 \sum_{k=1}^n (a-b)(x_k - ax_k)x_k = 2(a-b) \left[ \sum_{k=1}^n x_k y_k - a \sum_{k=1}^n x_k^2 \right]$

plus,  $a = \frac{\sum_{j=1}^n x_j y_j}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \Rightarrow a \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  (Independencia del índice  $j$  o  $k$ )

Siempre que  $2(a-b) \left[ \sum_{k=1}^n x_k y_k - a \sum_{k=1}^n x_k^2 \right] = 2(a-b) \left[ \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k y_k \right] = 0$

(1.0) 
$$\text{Entonces } \sum_{k=1}^n (a-b)^2 x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n (a-b)(y_k - a x_k) x_k = \sum_{k=1}^n (a-b)^2 x_k^2 \geq 0$$

2) Usando la Indicación, el primer término de la desigualdad

(1.0) 
$$\left\{ \begin{aligned} \text{quede } \sum_{k=1}^n (y_k - b x_k)^2 &= \sum_{k=1}^n \underbrace{[ (y_k - a x_k) + (a x_k - b x_k) ]^2}_{\text{Indicación}} \quad \text{desarrollando y separando en } \Sigma \\ &= \sum_{k=1}^n (y_k - a x_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^n (y_k - a x_k)(a - b) x_k + \sum_{k=1}^n (a - b)^2 x_k^2 \\ &\geq 0 \text{ según (1)} \end{aligned} \right.$$

(0.5) 
$$\text{Entonces } \sum_{k=1}^n (y_k - b x_k)^2 \geq \sum_{k=1}^n (y_k - a x_k)^2 \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

3) Los puntos en (a) mm: A(-2, 0), B(0, 4), C(1, 3) y D(2, 16)

Para  $y = ax$ ,  $a = \frac{\sum_{j=1}^4 x_j y_j}{\sum_{j=1}^4 x_j^2} = \frac{-2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 16}{(-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{35}{9}$

Entonces, la recta es  $y = \frac{35}{9} x$

Aproximadamente

