ECUACIONES DE REYNOLDS

ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

Notación Indicial

Para ahorrar escritura, se usará la notación indicial:

$$x_i = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

$$u_i = \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$$

La repetición de índices repetidos indica suma sobre ese índice. De este modo, la ecuación de continuidad para un fluido incompresible se escribe como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Al sumar sobre el índice i = 1, 2, 3 se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} 0$$

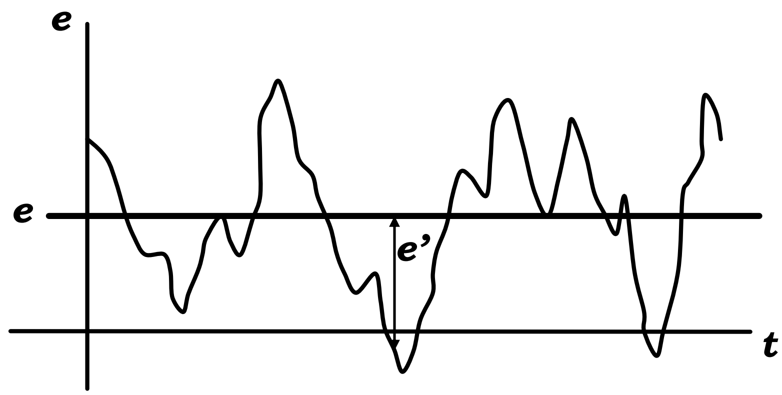
La ecuación del movimiento de un fluido newtoniano, incompresible en un campo gravitacional está dada por la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

En la deducción de la ecuación anterior no hubo restricción respecto al régimen de flujo, por lo que puede ser aplicada tanto a flujos laminares como a turbulentos.

Descomposición de Reynolds

Si en un punto del flujo se mide cualquier variable e de un flujo turbulento en función del tiempo, el registro que se obtiene es como el que se muestra a continuación:



Osborne Reynolds propuso descomponer la variable *e* en dos componentes: una media temporal, *e*, y una fluctuación en torno a la media, *e'*. De este modo, se puede escribir:

$$e(x_i,t) = \overline{e}(x_i) + e'(x_i,t)$$

donde el promedio temporal se define como:

$$\overline{e}(x_i) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e(x_i,t)dt$$

De la definición, es fácil ver que se cumple:

$$\overline{e'} = 0$$

$$\overline{\overline{e}} = \overline{e}$$

$$\overline{\frac{\partial e}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{e}}{\partial x_i}$$

$$\overline{\int e dx_i} = \int \overline{e} dx_i$$

Consideremos un flujo turbulento en el que sus propiedades estadísticas no varían en el tiempo, en particular su valor medio temporal, su desviación estándar y otros momentos de orden superior.

La descomposición de Reynolds aplicada a la ecuación de continuidad se traduce en:

$$\frac{\partial(\overline{u}_i + u_i')}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

Promediando en el tiempo la ecuación anterior:

$$\overline{\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} = 0$$

De donde resulta:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

O sea, la ecuación de continuidad se satisface tanto para las componentes medias como para las fluctuaciones de la velocidad.

Las ecuación de continuidad instantánea podemos escribirla indistintamente con el subíndice *i* o *j*, ya que ambos cubren (1, 2, 3), o sea:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Multiplicando la ecuación anterior (que es un escalar) por el vector u_i :

$$u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Sumando esta ecuación a la de momentum, resulta:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Aplicando la descomposición de Reynolds:

$$\frac{\partial \overline{u}_i + u_i'}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_i + u_i')(\overline{u}_j + u_j')}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\overline{\hat{p}} + \hat{p}')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\overline{u}_i + u_i')}{\partial x_j^2}$$

Tomando promedio temporal de esta ecuación:

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}_i + u_i'}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j')}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_j^2}}$$

O sea,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\overline{\partial u_i'}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial \bar{u}_i u_j'}}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u_i' \bar{u}_j}}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u_i' u_j'}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\overline{\partial p'}}{\partial x_i}\right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\overline{\partial^2 u_i'}}{\partial x_j^2}\right)$$

Varios de los términos de la ecuación anterior son nulos. Por ejemplo:

$$\frac{\overline{\partial \bar{u}_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial\, \overline{\bar{u}_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{\bar{u}}_i \overline{u'_j}}{\partial x_j} = 0$$

Considerando, además, que las propiedades estadísticas del flujo no varían en el tiempo, la ecuación de momentum se reduce a:

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial\, \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

Expandiendo la derivada del producto, el primer término del lado izquierdo queda:

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

Como se está considerando un fluido incompresible, la derivada del producto se reduce a:

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

por lo que la ecuación de momentum se escribe como:

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\, \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

Con el objeto de dar a la expresión anterior la forma de la segunda ley de Newton, por unidad de masa, pero aplicada a cantidades medias temporales, o sea:

$$\bar{a} = \sum \bar{f}$$

el segundo término del lado izquierdo lo pasamos al lado derecho:

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}$$

El efecto que tiene este simple paso algebraico no es menor, ya que podemos interpretar de otra manera al término $\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}$. Este término no es más que un flujo de momentum de las fluctuaciones turbulentas, pero al pasarlo al lado derecho, podemos *interpretarlo* como una fuerza, resultante de la turbulencia del flujo. Insisto, *no es una fuerza turbulenta, lo interpretamos así ya que simplifica el entendimiento de las ecuaciones y fenómenos turbulentos.*

Siguiendo con el álgebra:

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right)$$

Multiplicando la ecuación de continuidad por la viscosidad:

$$\nu \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

y derivando respecto a x_i:

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = 0$$

sumando a la ecuación de momentum:

$$\frac{\P\overline{u}_i\overline{u}_j}{\P x_j} = -\frac{1}{r}\frac{\P\bar{p}}{\P x_i} + \frac{1}{r}\frac{\P}{\P x_j}\left(m\frac{\P\overline{u}_i}{\P x_j} - r\overline{u_i' u_j'}\right) + \frac{m}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\P\overline{u}_j}{\P x_i}$$

agrupando términos:

$$\frac{\P\overline{u}_i\overline{u}_j}{\P x_j} = -\frac{1}{r}\frac{\P\bar{p}}{\P x_i} + \frac{1}{r}\frac{\P}{\P x_j}\left(m\left(\frac{\P\overline{u}_i}{\P x_j} + \frac{\P\overline{u}_j}{\P x_i}\right) - r\overline{u_i' u_j'}\right)$$

el término en paréntesis que multiplica la viscosidad dinámica es la tasa de deformación, e_{ij}, y me_{ij} corresponde a los esfuerzos de origen viscoso, los que denotaremos como t_{vij}. El subíndice v es para enfatizar el origen viscoso de estos esfuerzos.

De este modo, la ecuación de momentum queda:

$$\frac{\P\overline{u}_i\overline{u}_j}{\P x_j} = -\frac{1}{r}\frac{\P\bar{p}}{\P x_i} + \frac{1}{r}\frac{\P}{\P x_j}\left(t_{vij} - r\overline{u_i' u_j'}\right)$$

El término $t_{vij} - r\overline{u_i' u_j'}$ lo interpretamos como el esfuerzo total actuando en un flujo turbulento, cuando éste se representa en términos de sus cantidades medias temporales. Tiene dos componentes, una de origen viscoso, t_{vij} , y otra de origen turbulento, $-r\overline{u_i' u_j'}$, por lo que podemos escribir un esfuerzo total t_{ij}:

$$t_{ij} = t_{vij} + t_{tij}$$

donde $t_{tij} = -r\overline{u_i' u_j'}$ corresponde al efecto turbulento y se denomina esfuerzos *aparentes* de Reynolds o, simplemente, esfuerzos de Reynolds o esfuerzos turbulentos.

Luego, las ecuaciones que rigen las propiedades medias temporales de un flujo turbulento den un fluido newtoniano incompresible son:

Continuidad:

$$\frac{\P\overline{u}_j}{\P x_j} = 0$$

Cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{vij} - \rho\overline{u_i' u_j'}\right)$$

El sistema de ecuaciones anteriores se conoce como *ecuaciones de Reynolds.*

Siendo más preciso en la definición del promedio temporal, o sea considerando un T lo suficientemente grande para eliminar las fluctuaciones turbulentas, pero no tan grande como para eliminar la variación de la dependencia que puedan tener las características medias, es posible incluir la dependencia de las cantidades medias con el tiempo, resultando:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{vij} - \rho\overline{u_i' u_j'}\right)$$

Las ecuaciones de Reynolds presentan un gran avance para el estudio de los fenómenos turbulentos, pero no resuelve el problema, ya que τ_{tij} sigue siendo desconocido. Considerando la simetría de los esfuerzos turbulentos, $\tau_{tij} = \tau_{tji}$, resulta que tenemos 4 ecuaciones (una de continuidad y tres de momentum) y 10 incógnitas: $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{p}, \overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'}$. Esto es lo que se conoce como el *problema del cierre de la turbulencia* y consiste en el hecho de tener más incógnitas que ecuaciones. Luego, el próximo problema a resolver es determinar los esfuerzos turbulentos τ_{tij}, pero esa es materia de la próxima clase.