TEORÍA DE MODELOS

Consideremos algún fenómeno físico que está ocurriendo a dos escalas distintas. Podría ser, por ejemplo, el vuelo de un F-15 y el vuelo de un avión a control remoto. Aunque en un caso estamos hablando de un caza que puede alcanzar grandes altitudes y sobrepasar la velocidad del sonido y un avión a control remoto es prácticamente un juguete, cabe preguntarse si hay algo en común en el vuelo de ambos y, en caso de haberlo, si estudiamos el comportamiento de uno, ¿podemos inferir cómo se comportará el otro? La teoría de modelos nos da las pautas para este análisis y nos dice cuándo podemos extrapolar nuestros resultados de experiencias realizadas a distintas escalas.

Otro ejemplo, más nuestro alcance, corresponde al flujo en canales. Imagino que más de una vez se han preguntado acerca de la validez de los resultados obtenidos en el laboratorio cuando los aplicamos a un cauce natural. En el período comprendido entre los últimos años de la década de 1970 y la primera mitad de la década de 1990, en el Laboratorio de Hidráulica "Francisco Javier Domínguez" se estudió intensivamente la socavación alrededor de pilas de puentes. Los experimentos se realizaban en un canal de un poco más de 1 m de ancho y las socavaciones medidas eran del orden de los 10 cm. ¿Cómo podemos "creerle" a los resultados así obtenidos, con caudales de alrededor 10 l/s, y extrapolarlos a cauces naturales, a veces con varios cientos de metros de ancho, caudales de decenas o centenas de metros cúbicos por segundo y las socavaciones pueden ser de varios metros?

La respuesta radica en la validez de la teoría de modelos. Esta teoría se apoya fuertemente en el análisis dimensional, ya que son las cantidades adimensionales las que se preservan en modelo y prototipo.

SIMILITUD O SEMEJANZA

Consideremos en el prototipo una variable $a(x,y,z,t)$ y en el modelo $a'(x',y',z',t')$. La escala de a se define como:

$$\lambda = \frac{a'(x',y',z',t')}{a(x,y,z,t)} \tag{1}$$

Hay semejanza entre modelo y prototipo si λ_a es constante en todo el dominio de definición de la variable en cuestión.

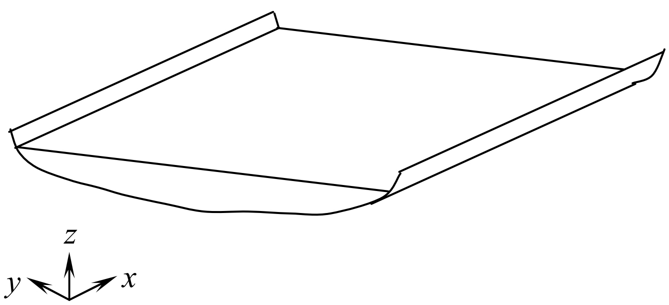
SEMEJANZA GEOMÉTRICA

Escala de longitudes	$\lambda_L \ (\equiv \lambda)$	
Escala de superficies	$\lambda_S = \lambda^2$	(2)
Escala de volúmenes	$\lambda_V = \lambda^3$	

Modelos distorsionados

En los modelos distorsionados las escalas de longitud son distintas en las diferentes direcciones:

$$\lambda_x = \frac{x'}{x} \quad , \quad \lambda_y = \frac{y'}{y} \quad , \quad \lambda_z = \frac{z'}{z} \tag{3}$$



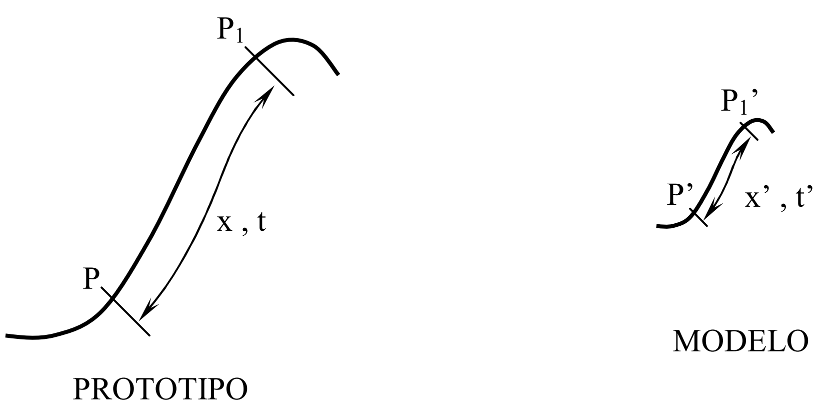
En modelos fluviales y marítimos es usual encontrar escalas distintas:

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda$$
$$\lambda_z = \lambda_H$$

Se denomina factor de distorsión al cuociente λ_H/λ.

SEMEJANZA CINEMÁTICA

La semejanza cinemática se refiere a la similitud de movimiento. Esta semejanza se refiere a que partículas homólogas deben ocupar posiciones homólogas en tiempos homólogos.



A partir de la escala de longitudes, $\lambda = \dfrac{x'}{x}$, y la de tiempo, $\lambda_t = \dfrac{t'}{t}$, obtenemos la escala de velocidad:

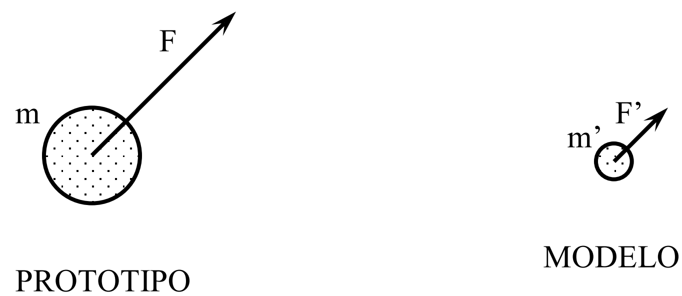
$$\lambda_V = \frac{V'}{V} = \frac{x'/t'}{x/t} = \frac{x'}{x}\frac{t}{t'} = \frac{\lambda}{\lambda_t} \tag{4}$$

Del mismo modo, la escala de aceleraciones está dada por:

$$\lambda a = \frac{\lambda}{\lambda_t^2} \tag{5}$$

SEMEJANZA DINÁMICA

La semejanza dinámica establece que sobre partículas homólogas actúan fuerzas homólogas, manteniendo una relación constante entre ellas.

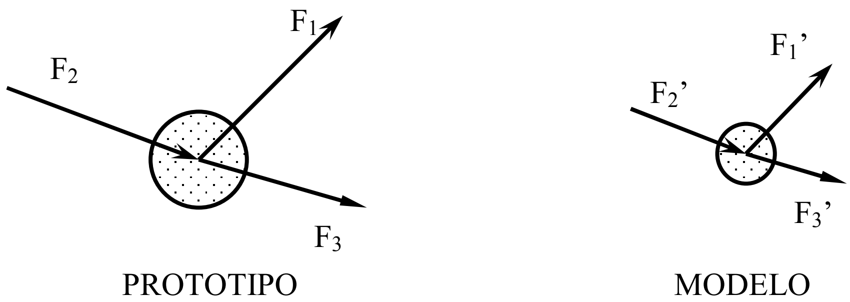


La escala de fuerzas está dada por $\lambda_F = \dfrac{F'}{F}$. Considerando que $F = ma$, se obtiene las siguientes relaciones entre escalas:

$$\lambda_F = \frac{m'a'}{ma} = \lambda_m \lambda_a \tag{6}$$

$$\lambda_F = \frac{\rho' \forall' a'}{\rho \forall a} = \lambda_\rho \lambda_\forall \lambda_a = \lambda_\rho \frac{\lambda^4}{\lambda_t^2} \tag{7}$$

DETERMINACIÓN DE LA ESCALA DE UN MODELO



En el prototipo se cumple: $ma = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = F$

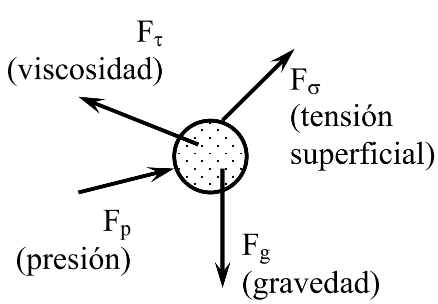
En el modelo: $m'a' = F_1' + F_2' + F_3' + \cdots = F'$

Si existe semejanza dinámica, se tiene que $\lambda_F = \dfrac{F'}{F}$ debe ser una constante en todo el dominio de las fuerzas, o sea:

$$\lambda_F = \frac{F'}{F} = \frac{F_1'+F_2'+F_3'+\cdots}{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots} = \frac{F_1'}{F_1} = \frac{F_2'}{F_2} = \frac{F_3'}{F_3} = \cdots$$

Si queremos que *todas* las fuerzas estén en la misma proporción, ¡resulta que el modelo debe ser igual al prototipo!

En la práctica, preservamos la proporción solamente de las fuerzas más relevantes en el fenómeno a estudiar. Por ejemplo:



La resultante es la suma de todas las fuerzas actuando sobre el elemento de fluido:

$$F = F_\tau + F_\sigma + F_p + F_g + \cdots$$

Analicemos ahora qué escalas resultan al suponer que dominan fuerzas de distintos orígenes.

Fuerzas de origen gravitacional dominan el fenómeno.

Supongamos un fenómeno donde dominan las fuerzas de origen gravitacional:

$$F \approx F_g$$
$$ma = mg$$
$$a = g$$
$$\lambda_a = \lambda_g$$

O sea, si domina la fuerza gravitacional, la escala de aceleraciones es igual a la escala de aceleración de gravedad.

Pero $\lambda_a = \dfrac{\lambda_V^2}{\lambda}$, de donde resulta:

$$\frac{\lambda_V^2}{\lambda\lambda_g} = 1 \tag{8}$$

$$\frac{\dfrac{V'^2}{V^2}}{\dfrac{L'}{L}\dfrac{g'}{g}} = 1$$

$$\frac{V^2}{Lg} = \frac{V'^2}{L'g'}$$

Se denomina número de Froude al parámetro adimensional $Fr = \dfrac{V}{\sqrt{Lg}}$. Por lo tanto, si estamos estudiando un fenómeno en el que dominan las fuerzas de origen gravitacional se debe preservar el número de Froude, es decir el número de Froude del modelo debe ser igual al del prototipo: *Fr' = Fr*. Como generalmente todos los experimentos se realizan en nuestro planeta Tierra, tanto el modelo como el prototipo están afectos a la misma aceleración de gravedad, o sea $\lambda_g = 1$. En este caso, la Ec. 8 indica que la relación entre la escala de velocidad y la de longitud está dada por:

$$\lambda_V = \lambda^{1/2} \tag{9}$$

Fuerzas de origen viscoso dominan el fenómeno.

Si dominan las fuerzas viscosas

$$F \approx F_\tau = \tau\, S \approx \mu \frac{dV}{dy} S$$

$$ma = \mu \frac{dV}{dy} S$$

$$\rho \forall a = \mu \frac{dV}{dy} S$$

$$\lambda_\rho \lambda_\forall \lambda_a = \lambda_\mu \frac{\lambda_V}{\lambda} \lambda_S$$

Pero $\lambda_\forall = \lambda^3$, $\lambda_S = \lambda^2$ y $\lambda_a = \dfrac{\lambda_V^2}{\lambda}$. Reemplazando en la relación anterior:

$$\lambda_\rho \lambda^3 \frac{\lambda_V^2}{\lambda} = \lambda_\mu \frac{\lambda_V}{\lambda} \lambda^2$$

$$\frac{\lambda_V \lambda}{\lambda_\mu / \lambda_\rho} = 1 \qquad (10)$$

Esta relación no es más que un cociente de números de Reynolds: $Re = \dfrac{VL}{\mu/\rho}$. Luego, si dominan los esfuerzos viscosos en el fenómeno, debe preservarse el número de Reynolds en modelo y prototipo:

$$\frac{V' L'}{\mu'/\rho'} = \frac{VL}{\mu/\rho} \qquad (11)$$

Si se usa el mismo fluido en el modelo y en el prototipo (por ejemplo, en los estudios de socavación): $\mu = \mu'$ y $\rho = \rho'$, luego:

$$\lambda_V = \lambda^{-1} \qquad (12)$$

$$\lambda_t = \lambda^2$$

Fuerzas debido a la tensión superficial dominan el fenómeno.

En este caso:

$$F \approx F_\sigma = \sigma L$$

$$ma = \sigma L$$

$$\rho \forall a = \sigma L$$

$$\lambda_\rho \lambda_\forall \lambda_a = \lambda_\sigma \lambda$$

de donde

$$\frac{\lambda_\rho \lambda \lambda_V^2}{\lambda_\sigma} = 1 \qquad (13)$$

Se denomina número de Weber al parámetro adimensional $We = \dfrac{\rho L V^2}{\sigma}$. Luego, si en un fenómeno dominan las fuerzas debido a tensión superficial, debe satisfacerse:

$$\frac{\rho L V^2}{\sigma} = \frac{\rho' L' V'^2}{\sigma'} \qquad (14)$$

Si se trabaja en el modelo con el mismo líquido que en el prototipo, la Ec. 13 se reduce a:

$$\lambda_V = \lambda^{-1/2}$$

Fuerzas debido a la presión dominan el fenómeno.

En este caso $F \approx F_p = pS$ y resulta

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_V^2} = 1$$

Se denomina número de Euler al parámetro adimensional $Eu = \dfrac{p}{\rho V^2}$.

Fuerzas de compresión elástica dominan el fenómeno.

En este caso $F \approx F_c = -E\dfrac{\Delta \cancel{V}}{\cancel{V}}S$, resultando $\dfrac{\lambda_\rho \lambda_V^2}{\lambda_E} = 1$, donde E es módulo de compresibilidad elástico. De este modo debe cumplirse $\dfrac{\rho V^2}{E} = \dfrac{\rho' V'^2}{E'}$. La velocidad del sonido en un medio infinito está dada por $a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, por lo que el parámetro adimensional anterior puede escribirse como $Ma = \dfrac{V}{a}$ y corresponde la número de Mach.

RESUMEN

NÚMERO ADIMENSIONAL	RELACIÓN DE FUERZAS	APLICACIÓN
$Fr = \dfrac{V}{\sqrt{Lg}}$	$\dfrac{Inercia}{Fuerza \quad gravitacional}$	Escurrimientos con superficie libre (ríos, canales, vertederos)
$Re = \dfrac{VL}{\mu/\rho}$	$\dfrac{Inercia}{Fuerza \quad viscosa}$	Tuberías con pérdidas friccionales y flujos laminares
$We = \dfrac{\rho L V^2}{\sigma}$	$\dfrac{Inercia}{Fuerza \quad tensión \quad superficial}$	Fenómenos capilares, modelos pequeños y flujos laminares
$Ma = \dfrac{V}{a}$	$\dfrac{Inercia}{Fuerza \quad elástica}$	Flujos sujetos a compresión, ondas de choque, golpe de ariete