Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería matemática
Cálculo Diferencial e Integral
Sección 6
Semestre Primavera 2013

Clase Auxiliar Nº1: Continuidad

Profesor: Felipe Célery
Auxiliar: Bruno Aguiló

P1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 = 0$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(\frac{1}{n}) > 0$. Demuestra que $f(0) \geq 0$.

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)} & x > 0 \\ \\ b & x = 0 \\ \\ (x-a)^2 & x < 0 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b de manera que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[a, b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demuestra que existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = \ell$.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\bar{x}$. Demuestra que existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $L > 0$ que satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Demuestra que f es continua.

Observación: Tales funciones se denominan 'Lipschitz de constante L'

P6. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $r_n > 0$ una sucesión tal que $r_n \to 0$. Prueba que f es continua en $\bar{x}$ si y solo si la sucesión

$$s_n := \sup_x \{|f(x) - f(\bar{x})| \ : \ |x - \bar{x}| \leq r_n\}$$

converge a cero.