Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería matemática
Cálculo Diferencial e Integral
Sección 6
Semestre Primavera 2013

Clase Auxiliar N°5: Preparación Control 1

Profesor: Felipe Célèry
Auxiliar: Bruno Aguiló

P1. **(a)** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y dos veces derivable en (a,b). Prueba que si f alcanza su máximo global en $x_0\in(a,b)$, entonces $f''(x_0)\leq 0$
Indicación: Usa un desarrollo limitado de orden 2 de f en torno a x_0

(b) Sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua y dos veces derivable en $(0,1)$, la cual satisface

$$g''(x)=x^3g(x)+g^2(x)g'(x),\quad \forall x\in(0,1)$$

Demuestra que si $g(0)=g(1)=0$, entonces $g(x)\leq 0$ en todo $[0,1]$
Indicación: Argumenta por contradicción y usa la parte (a) donde corresponda

P2. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y dos veces derivable en (a,b) y $P(x)$ un polinomio de grado 1. Si $P(a)=f(a)$ y $P(b)=f(b)$, se quiere probar que para cada $\bar{x}\in(a,b)$, $\exists\xi\in(a,b)$ tal que:

$$f(\bar{x})=P(\bar{x})+\frac{f''(\xi)}{2}(\bar{x}-a)(\bar{x}-b)$$

Para esto, procede como sigue:

(a) Dado $\bar{x}\in(a,b)$, justifica que existe un único $\lambda\in\mathbb{R}$ para el cual la función $h(x)=f(x)-P(x)-\lambda(x-a)(x-b)$ se anula en $\bar{x}$ ($h(\bar{x})=0$).

(b) Aplica el teorema del Valor Medio para $h(x)$ en $[a,\bar{x}]$ y $[\bar{x},b]$ justificando tus hipótesis.

(c) Utiliza los resultados de (b) y el teorema del valor medio (o Rolle) en $h'(x)$ para probar que $\exists\xi\in(a,b)$ tal que $h''(\xi)=0$.

(d) Utiliza (c) y la definición de h para calcular el valor de λ en función de ξ y ocupa este resultado y el punto (a). Concluye.

P3. Considera la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x^2)}$. Se te pide:

(a) Dominio, paridad, signos de f.

(b) Continuidad, reparando donde corresponda. Asíntotas.

(c) Cálculo de $f'(x)$ para $x\neq 0$ y, si es posible, $f'(0)$. Analiza crecimientos. Encuentra máximos y mínimos (si es que existen).

(d) Cálculo de $f''(x)$. Estudia concavidad, convexidad, inflexiones.

(e) Gráfico aproximado, señalando valores principales y recorrido.

P4. A partir de un círculo de papel de radio R, se desea construir un cono, recortando del círculo un sector circular $\widehat{AOB}$ de ángulo central θ y juntando los trozos OA y OB de modo que coincidan. Se formará de esta manera un cono recto circular cuya base es un círculo de perímetro igual a la longitud del arco que queda después del corte, y cuya generatriz tiene longitud igual al radio del círculo original.

Para calcular el ángulo θ de modo que el cono formado como se indicó tenga volumen máximo, se te pide:

(a) Demuestra que el radio basal r del cono es $r = R(1 - \frac{\theta}{2\pi})$.

(b) Demuestra que la altura h del cono es $h = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$

(c) Verifica que con la sustitución $x = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ el volumen del cono queda

$$V(x) = \frac{\pi}{3} R^3 x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

(d) Analiza la función $V(x)$ indicando: Dominio, ceros, signos de $V(x)$, paridad, cálculo de $V'(x)$, crecimientos y deduce el valor de x que maximiza $V(x)$.

(e) Calcula el volumen máximo del cono y el ángulo θ que lo genera.